TROJNÝ INTEGRÁL

(1)

integrál funkce tří proměnných

stručná def: (analogické jako dvojný integrál)

Zavedeme integrál na kvádru $P = \langle a,b \rangle \times \langle c,d \rangle \times \langle e,f \rangle$

dělením intervalů $\langle a,b \rangle$, $\langle c,d \rangle$ a $\langle e,f \rangle$

rozdělíme kvádr P na dílčí kvádry P_{ijk}

o stranách Δx_i, Δy_j a Δz_k a vytvoříme

integrální součet

$$\sum_i \sum_j \sum_k f(C_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k, \text{ kde}$$

C_{ijk} je lib. zvolený bod v P_{ijk}.

Zjemňováním vytvoříme posloupnost zlepšujících se odhadů, její limita (pokud existuje) se nazývá trojný integrál funkce f na obdélníku P

a značíme

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Vlastnosti a výpočet:

Jsou-li f a g integrovatelné na oboru A, jsou integrovatelné i funkce $f+g$ a αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ a platí

$$\iiint_A (f+g)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f\,dx\,dy\,dz + \iiint_A g\,dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_A \alpha f\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_A f\,dx\,dy\,dz$$

Pokud $A = A_1 \cup A_2$, přičemž A_1 a A_2 nemají společné vnitřní body, platí

$$\iiint_A f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{A_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{A_2} f\,dx\,dy\,dz$$

Věta o trojnásobném integrálu (Fubiniova): (3)

Předpokládejme, že f je spojitá na $B \subset E_3$. Je-li B obor popsaný

$$a \le x \le b$$
$$d(x) \le y \le h(x)$$
$$D(x,y) \le z \le H(x,y),$$

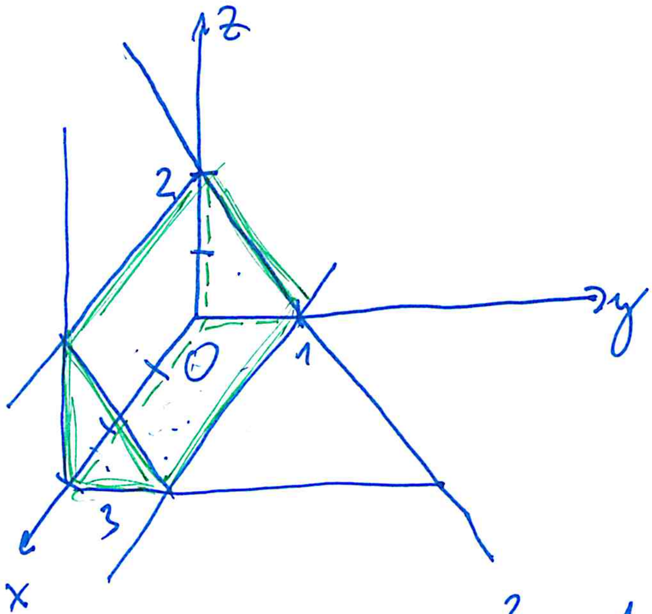
platí

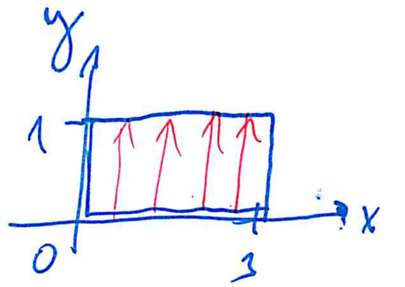
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{d(x)}^{h(x)} \left(\int_{D(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right] dx$$

a analogicky pro další varianty popisu oboru B.

Příklad: $\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$

obor B je ohraničený: $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=3,\ z=2-2y$





$0 \le x \le 3$

$0 \le y \le 1$

$0 \le z \le 2-2y$

$$\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 \Bigg[\underbrace{\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{2-2y} x\,dz}_{(*)} \Big) dy}_{(*)} \Bigg] dx = \int_0^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$(*)\quad \int_0^{2-2y} x\,dz = x\cdot[z]_0^{2-2y} = x(2-2y)$$

$$(*)\quad \int_0^1 x(2-2y)\,dy = x\left[2y-y^2\right]_0^1 = x$$

Výpočet trojného integrálu ve válcových souřadnicích ⑤

Buď $u = f(x,y,z)$ spojitá funkce na B. Pomocí transformačních rovnic $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = z$ dostaneme $u = f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z) = g(\varrho, \varphi, z)$.

Pak platí

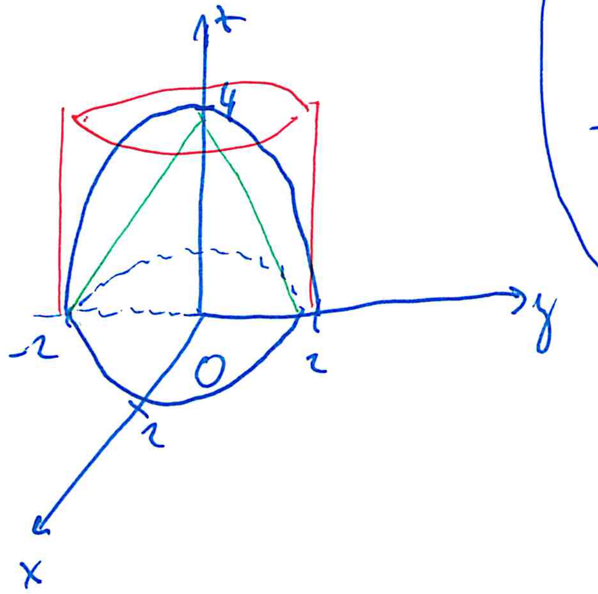
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\overline{B}} g(\varrho,\varphi,z)\cdot\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\,,\ \text{kde}$$

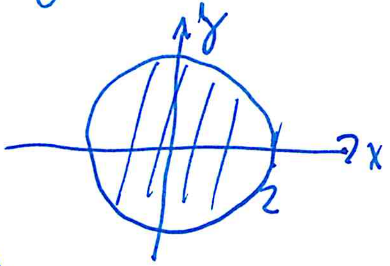
$\overline{B}$ značí obor B transformovaný do válcových souřadnic.

Příklad: $\iiint\limits_{C} 1\,dx\,dy\,dz = V = \frac{16}{2}\pi$

$V_{VÁLCE} = 16\pi \qquad V_{KUŽEL} = \frac{16}{3}\pi$

C je ohraničený $z = 4 - x^2 - y^2$ a $z = 0$





$0 \le \rho \le 2$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le z \le 4 - \rho^2$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$z = z$

$$\iiint\limits_{C} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\bar{C}} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi}\underbrace{\Big[\int_0^{2}\Big(\underbrace{\int_0^{4-\rho^2}\rho\,dz}_{*}\Big)d\rho\Big]}_{*}d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\,d\varphi = 4[\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\underline{8\pi}}$$

$$\int_0^{4-\rho^2} \rho\,dz = \rho[z]_0^{4-\rho^2} = \rho(4-\rho^2) = 4\rho - \rho^3$$

$$\int_0^{2} [4\rho - \rho^3]\,d\rho = \Big[2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\Big]_0^2 = 8 - 4 = 4$$

Výpočet trojného integrálu ve sférických souřadnicích

Buď $u=f(x,y,z)$ spojitá na B. Pomocí transformace

$x=r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y=r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z=r\cos\vartheta$ můžeme

psát $u=f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)=g(r,\varphi,\vartheta)$.

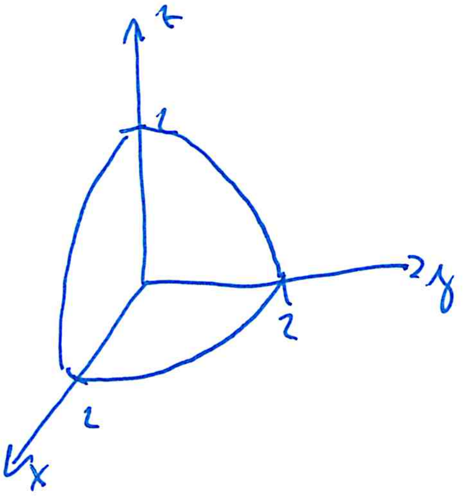
Potom platí

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{\bar{B}} g(r,\varphi,\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta,$$

kde $\bar{B}$ značí obor B transformovaný do sférických souřadnic.

Příklad: $\displaystyle\iiint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

$D:\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$



$0\le r\le 2$

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\bar D} \left(\overbrace{r^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta}^{x^2+y^2}\right) r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

$$= \iiint_{\bar D} r^4\sin^3\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^2\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin^3\vartheta\,d\vartheta}_{(*)}\right)dr\right]d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{64}{15}\,d\varphi = \frac{64}{15}\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15}\pi$$

$$(*)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin^3\vartheta\,d\vartheta = r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = -r^4\int_1^0(1-t^2)\,dt =$$

$$t = \cos\vartheta$$

$$dt = -\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= -r^4\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = -r^4\left(-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}r^4$$

$$\int_0^2 \frac{2}{3}r^4\,dr = \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{32}{5} = \frac{64}{15}$$

APLIKACE trojného integrálu:

objem tělesa B:

$$V(B) = \iiint_B 1 \, dx\,dy\,dz$$

hmotnost tělesa B o hustotě $h = h(x,y,z)$

$$m(B) = \iiint_B h(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$$

$$\left(h = \text{konst.} \quad m = \iiint_B h \, dx\,dy\,dz = h \cdot \iiint_B 1 \, dx\,dy\,dz = h \cdot V \right)$$

těžiště $T = [x_T, y_T, z_T]$

$$x_T = \frac{1}{m} \iiint_B x \cdot h \, dx\,dy\,dz$$

$$y_T = \frac{1}{m} \iiint_B y \cdot h \, dx\,dy\,dz$$

$$z_T = \frac{1}{m} \iiint_B z \cdot h \, dx\,dy\,dz$$

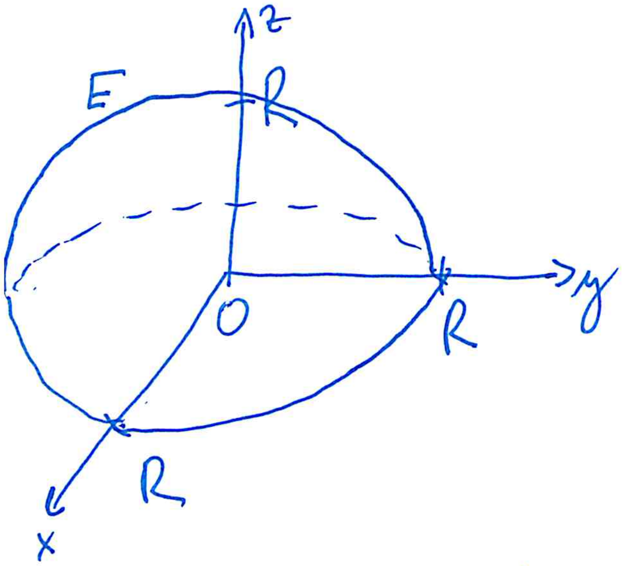
momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \underbrace{h \, dx\,dy\,dz}_{\substack{\text{element hmotnosti} \\ dm = h\,dV}}$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) h \, dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \iiint_B (y^2 + x^2) \cdot h \, dx\,dy\,dz$$

Hledáme těžiště horní polokoule, $h(x,y,z)=1$



$$x_T = y_T = 0$$

$$m = h \cdot V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$x = r\cos\varphi \sin\vartheta \qquad 0 \le r \le R$

$y = r\sin\varphi \sin\vartheta \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = r\cos\vartheta \qquad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$

$$z_T = \frac{1}{m}\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{2\pi R^3}\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \frac{3}{\cancel{2\pi R^3}}\cdot\frac{\pi R^{\cancel{4}}}{4} = \boxed{\frac{3R}{8}}$$

$$\iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \iiint_E r^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^R\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin 2\vartheta\,d\vartheta\right)d\varphi\right]dr = \frac{1}{2}\int_0^R 2\pi r^3\,dr =$$

(*)

$$= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{R^4}{4}\pi$$

(*) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin 2\vartheta\,d\vartheta = \left[-r^3\frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{r^3}{2}(-1-1) = r^3$$

$$\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi = r^3\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r^3$$