<u>Vektorové pole</u>: na M je funkce, která ①

každému bodu z M přiřazuje vektor $\vec{a}$ vztahem:

$$\vec{a} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j} \quad \text{v rovině, nebo}$$

$$\vec{a} = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z).\vec{k} \quad \text{v prostoru}$$

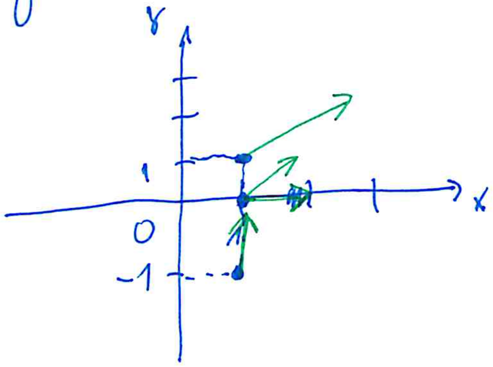
Skalární pole: funkce dvou nebo tří proměnných

<u>Příklad</u>: $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + x^2\vec{j} = (x+y, x^2)$

$\vec{a}: [1,1] \mapsto (2,1)$

$[1,0] \mapsto (1,1)$

$[1,-1] \mapsto (0,1)$



<u>Potenciálové pole</u>: Vektorové pole $\vec{a} = u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}$ se nazývá potenciálové na M, existuje-li funkce f mající na M spojité parciální derivace takové, že

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u(x,y) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v(x,y) \qquad \text{tj. } \vec{a} = \operatorname{grad} f$$

analogicky v prostoru: $\vec{b} = u(x,y,z)\vec{i} + v(x,y,z)\vec{j} + w(x,y,z)\vec{k}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v \quad \frac{\partial f}{\partial z} = w \qquad \text{tj. } \vec{b} = \operatorname{grad} f$$

V rovině: Předpokládejme, že $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ mají spojité parciální derivace na M. Pak pole $\vec{a}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$ je potenciální na M, právě když

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}}$$

příklad: 1) $\vec{a}=\underbrace{(x+y)}_{u}\vec{i}+\underbrace{x^2}_{v}\cdot\vec{j}=(\underbrace{x+y}_{u},\underbrace{x^2}_{v})$

Je potenciální? $\frac{\partial u}{\partial y}=1 \overset{?}{\neq} \frac{\partial v}{\partial x}=2x$

není potenciální

2) $\vec{a}=\underbrace{y}_{u}\vec{i}+\underbrace{x}_{v}\vec{j}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=1\overset{?}{=}\frac{\partial v}{\partial x}=1$ je potenciální v R^2

Hledáme potenciál: hledáme $z=f(x,y)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=u=y & f&=xy+g(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=v=x & f&=xy+h(x)\end{aligned}\right\}\ f(x,y)=xy+C$$

V prostoru: Rotací pole $\vec{a} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ rozumíme

pole $\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$

nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$: $\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{\partial w}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial v}{\partial z}\vec{i} + \dots$$

Předpokládejme, že u, v, w mají spojité parciální derivace na M. Pak vektorové pole $\vec{b} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ je potenciální na M, právě když

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \vec{o} \text{ ve všech bodech } M.$$

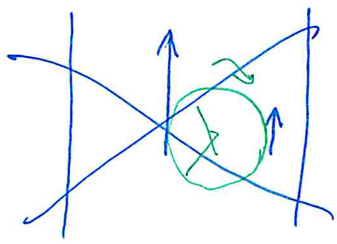
Příklad: Je pole $\vec{b} = x\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ potenciální na $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$?

$$\operatorname{rot}\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xz & y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,2y + \vec{k}\cdot z + \cancel{0\vec{j}} - 0\vec{k} - x\vec{i} - \cancel{0\vec{j}} =$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix}$$

$$= (2y - x)\vec{i} + z\vec{k} \neq \vec{o}$$

pole $\vec{b}$ není potenciální!



KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU

Nechť je dána po částech hladká křivka c orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (a příp. $z = z(t)$), $t \in \langle a, b\rangle$

a vektorové pole $\vec{a} = u(x,y)\,\vec{i} + v(x,y)\,\vec{j}$

(případně $\vec{b} = u(x,y,z)\,\vec{i} + v(x,y,z)\,\vec{j} + w(x,y,z)\,\vec{k}$).

Potom křivkový integrál 2. druhu pole $\vec{a}$ (resp. $\vec{b}$) podél křivky c definujeme jako:

$$\underbrace{\int_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_c u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy}_{\text{označení}} = \int_a^b \Big(u(x(t),y(t))\,x'(t) + v(x(t),y(t))\cdot y'(t)\Big)\,dt$$

resp. $$\int_c \vec{b}\cdot d\vec{r} = \int_c u(x,y,z)\,dx + v(x,y,z)\,dy + w(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_a^b \Big(u(\cancel{x,y,z}\, x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + v(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + w(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\Big)\,dt$$

Vlastnosti:

$$\int_C (\vec{a}+\vec{b})\,d\vec{r} = \int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_C \vec{b}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_C \alpha\vec{a}\cdot d\vec{r} = \alpha\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

$$\int_{C_1+C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = -\int_{-C} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$, kde $-C$ značí křivku opačně orientovanou než C.

Příklad:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = W$$ práce

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = U$$ napětí ($\vec{E}$ je intenzita el. pole)

atd.

Příklady: $\int\limits_C y\,dx + x\,dy$

a) c je úsečka z [1,1] do [2,4]

$x = 1 + t \qquad dx = 1\,dt$

$y = 1 + 3t \qquad dy = 3\,dt$

$t \in \langle 0,1 \rangle$

$$\int\limits_C y\,dx + x\,dy = \int_0^1 \underbrace{(1+3t)}_{y}\,\underbrace{1.\,dt}_{dx} + \underbrace{(1+t)}_{x}.\,\underbrace{3\,dt}_{dy} =$$

$$= \int_0^1 (4 + 6t)\,dt = \left[4t + 3t^2\right]_0^1 = \underline{\underline{7}}$$

b) c je parabola $y = x^2$ z [1,1] do [2,4]

$x = t \qquad dx = dt$

$y = t^2 \qquad dy = 2t\,dt$

$t \in \langle 1,2 \rangle$

$$\int\limits_C y\,dx + x\,dy = \int_1^2 t^2\,dt + t\cdot 2t\,dt = \int_1^2 3t^2\,dt = \left[t^3\right]_1^2 = \underline{\underline{7}}$$

c) c je kružnice $S=[0,0]$, $R=2$

$x = 2\cos t \quad dx = -2\sin t\, dt$

$y = 2\sin t \quad dy = 2\cos t\, dt$

$t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\int_c y\, dx + x\, dy = \int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t\, dt) + 2\cos t\, 2\cos t\, dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = 4\frac{1}{2}\left[\sin 2t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{0}}$$

Je-li $\vec{a}$ potenciálné pole na M s potenciálovou funkcí f a c je hladká křivka na M je

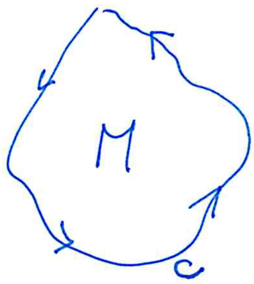
$$\int_c \vec{a}.d\vec{r} = f(B) - f(A),$$ kde A je počáteční bod křivky c a B koncový bod křivky c

(nezávislost integrálu na integrační cestě)

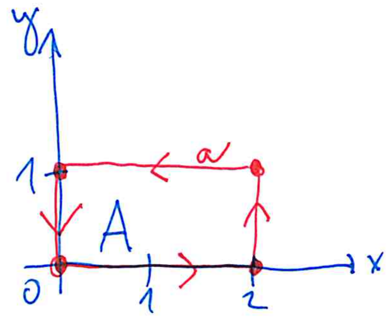
Speciálně $\oint_c \vec{a}.d\vec{r} = 0$ pro c uzavřenou křivku

Greenova věta: Buď M množina v E_2 jejíž hranici tvoří jednoduchá, uzavřená, po částech hladká kladně orientovaná křivka c. Předpokládejme, že $u(x,y)$, $v(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ jsou spojité na M. Potom

$$\int_c u\,dx + v\,dy = \iint_M \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$



Příklad: $\int_a xy\,dx + x^2\,dy$, kde a je kladně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $[0,0], [2,0], [2,1], [0,1]$



$$\int_a \underbrace{xy}_{u}\,dx + \underbrace{x^2}_{v}\,dy = \iint_A (2x - x)\,dx\,dy = \iint_A x\,dy\,dx =$$

$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 1$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 x\,dx \right) dy = \int_0^1 2\,dy = \underline{\underline{2}}$$