

Algoritmy na hledání nejkratší cesty v grafu

Základní pojmy a vlastnosti

Učitelství informatiky

28. února 2026

Co je na vstupu?

Na vstupu algoritmu je **graf s ohodnocenými hranami**.

- Graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran.
- Ohodnocovací funkce $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, která každé hraně přiřazuje reálné číslo (délku, cenu, časovou náročnost).

Cílem je najít „nejkratší“ spojení mezi vrcholy, tedy takové, kde je součet ohodnocení hran minimální.

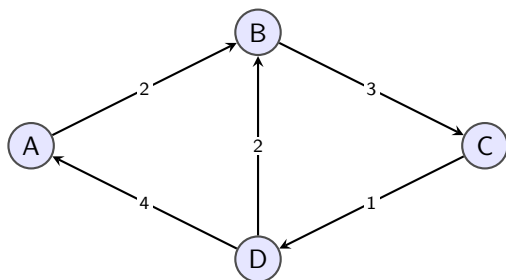
Stručné připomenutí rozdílů z teorie grafů:

- **Sled (walk):** Libovolná posloupnost vrcholů a hran. Vrcholy i hrany se **mohou opakovat**.
- **Tah (trail):** Sled, ve kterém se **neopakují hrany** (vrcholy se opakovat mohou).
- **Cesta (path):** Tah, ve kterém se **neopakují vrcholy** (a tím pádem ani hrany).

Délka

Délka sledu, tahu nebo cesty je definována jako **součet hodnot (ohodnocení) hran**, které daný sled/tah/cesta obsahuje.

Příklad: Sled, tah a cesta



- **Cesta z A do C:** $A \rightarrow B \rightarrow C$ (délka: $2 + 3 = 5$)
- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \dots$ zde se opakuje hrana $B-C$, je to **sled** (délka: $2 + 3 + 1 + 2 + 3 = 11$).
- **Tah z A do B:** $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ (hrany jsou různé, vrchol B se opakuje; délka: $2 + 3 + 1 + 2 = 8$)

Kladné hrany a cesty

Jsou-li ohodnocení všech hran v grafu **kladná**, je nejkratším sledem (či tahem) vždy **cesta**.

Proč? Jakékoli opakování vrcholu znamená, že jsme udělali cyklus. U kladných hran má cyklus kladnou délku. Jeho vynecháním získáme kratší trasu.

Záporné hrany a nulové cykly

Tvrzení výše platí i pro graf se **záporným ohodnocením**, pokud graf neobsahuje cyklus záporné délky.

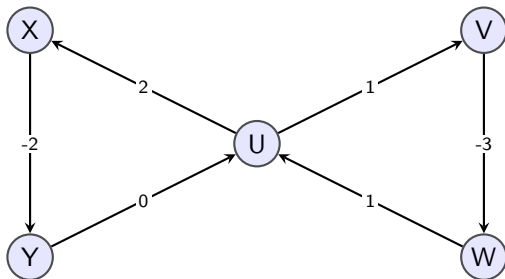
- Pokud graf obsahuje **cyklus nulové délky**, existují v grafu stejně dlouhé cesty a sledy/tahy (průchodem nulového cyklu se celková délka nezmění).

Záporné cykly

V případě existence cyklu se zápornou délkou (tzv. záporný cyklus) **neexistuje** v grafu nejkratší sled/tah/cesta.

Záporným cyklem bychom mohli procházet donekonečna a celková délka by neustále klesala k $-\infty$.

Příklad: Cykly v grafu



- **Pravý cyklus** ($U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow U$): Délka $1 - 3 + 1 = -1$. **Záporný cyklus!** Nejkratší cesta z U do U neexistuje (resp. je $-\infty$).
- **Levý cyklus** ($U \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow U$): Délka $2 - 2 + 0 = 0$. **Nulový cyklus.** Sled $U \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow U$ má stejnou délku jako triviální cesta U (délka 0).

Struktura nejkratších cest (bez záporných cyklů)

Soustředme se nyní na případ grafu bez záporných cyklů. Zde platí dvě klíčové vlastnosti, o které se opírají vyhledávací algoritmy:

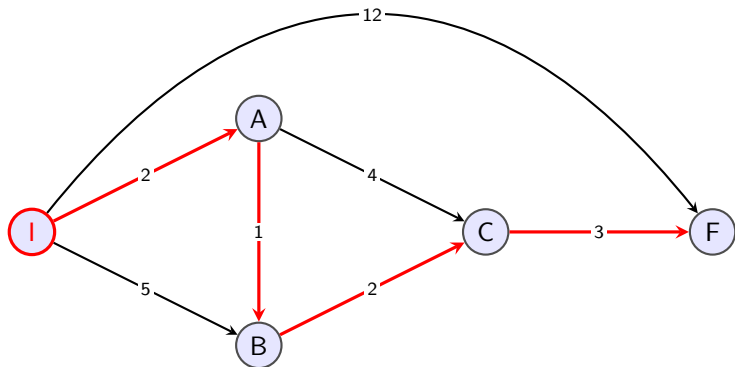
1. Podcesty nejkratších cest

Máme-li nejkratší cestu z vrcholu **I** do vrcholu **F**, pak nám jakákoliv část této cesty (od **I** do libovolného mezivrcholu) slouží jako **nejkratší cesta z I do tohoto mezivrcholu**.

2. Strom nejkratších cest

Nejkratší cesty z jednoho výchozího (pevně daného) vrcholu **I** do všech dosažitelných vrcholů grafu tvoří **strom** (tzv. strom nejkratších cest).

Příklad: Struktura a strom nejkratších cest



- Nejkratší cesta z **I** do **F** je $I \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ (délka 8).
- Podcesta $I \rightarrow A \rightarrow B$ (délka 3) je prokazatelně nejkratší cestou z **I** do **B** (hrana $I \rightarrow B$ s délkou 5 je delší).
- Červeně vyznačené hrany tvoří **strom nejkratších cest** s kořenem ve vrcholu **I**.