Nerovnice, grafy, monotonie a spojitost

text pro studenty Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci

vzniklý za podpory fondu F

Martina Šimůnková

29. prosince 2016

1 Úvod

Na druhém stupni základní školy se žáci seznámí s lineárními rovnicemi a nerovnicemi. Naučí se je řešit úpravami a graficky.

Na střední škole se seznámí s dalšími typy rovnic, jmenovitě kvadratickými, logaritmickými, exponenciálními a goniometrickými a dále se seznámí s kvadratickými nerovnicemi a s nerovnicemi v součinovém a podílovém tvaru. Nerovnice se studenti učí řešit úpravami, graficky a metodou založenou na intuitivním chápání spojitosti funkce.

Dále se na střední škole seznámí s pojmem monotonie funkce, který má přímočarou aplikaci na řešení nerovnic.

Cílem textu je

1. Zopakovat grafické řešení nerovnic a spolu s ním zopakovat kuželosečky a jejich rovnice a grafy elementárních funkcí.
2. Seznámit studenty s vlastností nabývání mezihodnot (takzvanou Darbouxovou vlastností) a vysvětlit její aplikaci na řešení nerovnic.
3. Zopakovat, co je monotonie funkce a ukázat, jak monotonii použít na řešení nerovnic.

2 Poznámka o značení

Ve shodě s praxí v matematické literatuře a v rozporu se školskou matematikou označujeme uzavřené intervaly hranatými závorkami, například $[1,3]$. Dále označujeme symbolem log přirozený a nikoliv dekadický logaritmus.

V textu dále používáme desetinnou tečku a nikoliv čárku.

3 Nerovnice

V dalších kapitolách vysvětlíme tři výše zmíněné způsoby řešení nerovnic na čtyřech konkrétních příkladech

1. $$0.2^x < 4$$
2. $$3^{1-x^2} > 2$$
3. $$\sqrt{3x-2} > 4 - 3x$$
4. $$\sqrt{x^2+5} > 5 - x$$

4 Rovnice

Ve dvou z našich tří způsobů potřebujeme znát kořeny příslušné rovnice, proto je nyní vypočteme.

1. Rovnici
   $$0.2^x = 4$$
   zlogaritmujeme, dostaneme
   $$x \log 0.2 = \log 4$$
   Vydělením rovnice číslem $\log 0.2$ dostaneme
   $$x = \frac{\log 4}{\log 0.2}$$
   Před vyčíslením ještě upravíme $\log 0.2$ na $-\log 5$. Dostaneme
   $$x = -\frac{\log 4}{\log 5} \doteq -0.861$$
2. Zlogaritmováním rovnice
   $$3^{1-x^2} = 2$$
   dostaneme
   $$(1-x^2)\log 3 = \log 2$$

odkud postupně vyjádříme výraz x^2

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= \frac{\log 2}{\log 3} \\ x^2 &= 1 - \frac{\log 2}{\log 3} \end{aligned}$$

Protože je číslo na pravé straně kladné, má kvadratická rovnice dva kořeny

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - \frac{\log 2}{\log 3}} \doteq \pm 0.608$$

3. Rovnici

$$\sqrt{3x - 2} = 4 - 3x$$

umocníme

$$3x - 2 = (4 - 3x)^2$$

upravíme

$$3x - 2 = 16 - 24x + 9x^2$$

a kvadratickou rovnici vyřešíme. Dostaneme kořeny

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2.$$

Při úpravách jsme rovnici umocňovali, a to je operace, která může zvětšit množinu řešení. Je tedy třeba provést zkoušku. Zjistíme tím, že rovnice s odmocninou má jeden kořen

$$x = 1.$$

4. Rovnici

$$\sqrt{x^2 + 5} = 5 - x$$

umocníme

$$x^2 + 5 = (5 - x)^2$$

a upravíme postupně na

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= x^2 - 10x + 25 \\ 5 &= -10x + 25 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Provedením zkoušky zjistíme, že $x = 2$ je i kořen rovnice s odmocninou.

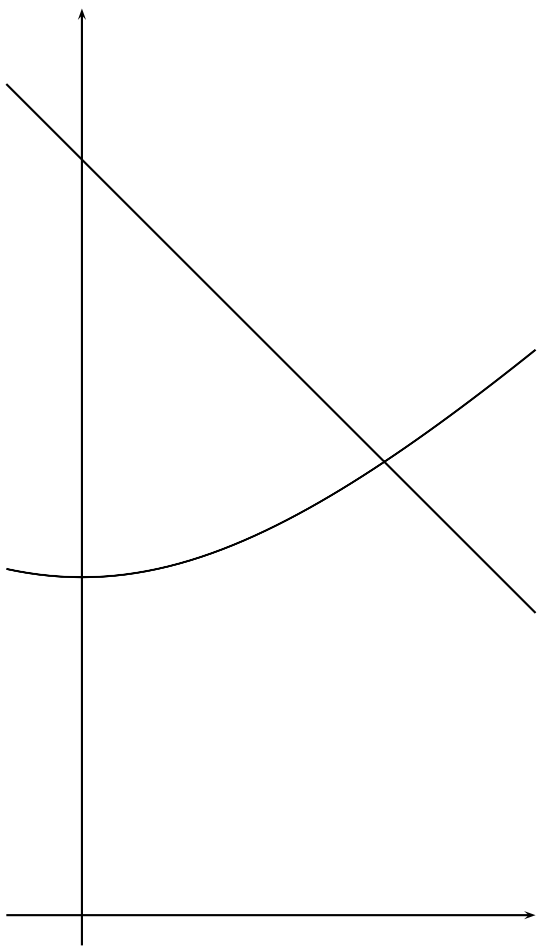
5 Grafické řešení nerovnic

Poznámka: na obrázcích nejsou vyznačeny osy a jednotky, předpokládáme, že si je čtenář dokáže doplnit.

Graficky vyřešíme tři ze čtyř nerovnic, pro které známe grafy obou jejich stran.

Z typografických důvodů začneme poslední nerovnicí.

4.



Graf funkce

$$l : x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}$$

získáme umocněním rovnice

$$y = \sqrt{x^2 + 5}$$

a úpravou na rovnici hyperboly

$$y^2 - x^2 = 5.$$

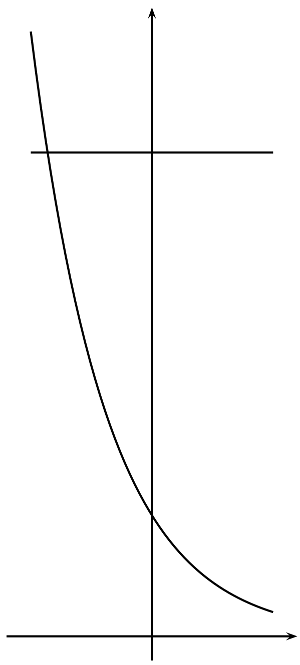
Z rovnice před umocněním plyne $y \geq 0$, grafem levé strany nerovnice je tedy větev hyperboly ležící v polorovině $y \geq 0$. Na obrázku je tato větev hyperboly spolu s přímkou o rovnici $y = 5 - x$. Z grafu vidíme, že řešením nerovnice

$$\sqrt{x^2 + 5} > 5 - x$$

je interval (kořen rovnice, $+\infty$), tedy $(2, +\infty)$ a řešením nerovnice

$$\sqrt{x^2 + 5} < 5 - x$$

je interval $(-\infty, 2)$.

1. 

Na obrázku vidíme graf funkce

$$l : x \mapsto 0.2^x$$

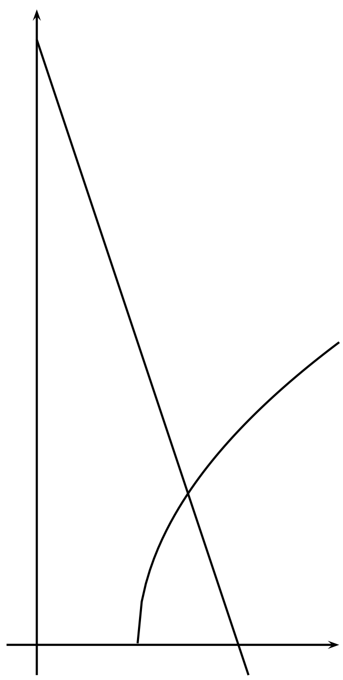
a přímku o rovnici $y = 4$. Z grafu vidíme, že řešením nerovnice

$$0.2^x < 4$$

je interval $(\text{kořen rovnice}, +\infty)$, tedy $(-\log 4/\log 5, +\infty)$ a řešením nerovnice

$$0.2^x > 4$$

je interval $(-\infty, -\log 4/\log 5)$.

3. 

Graf levé strany nerovnice

$$l : x \mapsto \sqrt{3x-2}$$

získáme umocněním rovnice $y = \sqrt{3x-2}$ na rovnici paraboly $y^2 = 3x - 2$. Parabola má vrchol v bodě $[2/3, 0]$, osu v ose x a je otevřená ve směru kladné poloosy x. Z rovnice před umocněním plyne $y \geq 0$, grafem levé strany nerovnice je tedy polovina paraboly ležící v polorovině $y \geq 0$.
Na obrázku vidíme tuto půlku paraboly a přímku o rovnici $y = 4 - 3x$ a z grafu vidíme, že řešením nerovnice

$$\sqrt{3x-2} > 4 - 3x$$

je interval $(\text{kořen rovnice}, +\infty)$, tedy $(1, +\infty)$ a řešením nerovnice

$$\sqrt{3x-2} < 4 - 3x$$

je interval $(2/3, 1)$.

6 Vlastnost nabývání mezihodnot a řešení nerovnic

V předchozí kapitole jsme vyřešili nerovnice graficky ve třech případech, kdy grafem levé i pravé strany byla známá křivka (přímka, půlka paraboly, jedna větev hyperboly a graf exponenciální funkce). Postup, který si ukážeme v této kapitole, můžeme použít i v případě, kdy graf nakreslit neumíme.

6.1 Postup řešení nerovnic

Z definičního oboru výrazů v nerovnici vyloučíme kořeny rovnice, tím se nám tento definiční obor rozpadne na intervaly. Pro názornost uvedeme, jaké vyjdou intervaly pro naše příklady.

1. $(-\infty, -\log 4/\log 5)$ a $(-\log 4/\log 5, +\infty)$
2. $(-\infty, -\sqrt{1-\log 2/\log 3})$, $(-\sqrt{1-\log 2/\log 3}, \sqrt{1-\log 2/\log 3})$ a $(\sqrt{1-\log 2/\log 3}, +\infty)$
3. $[2/3, 1)$ a $(1, +\infty)$
4. $(-\infty, 2)$ a $(2, +\infty)$

V dalším postupu vybereme z každého intervalu jeden libovolný bod a zjistíme, zda je řešením nerovnice. Opět uvedeme výsledky pro naše příklady.

1. Z intervalu $(-\infty, -\log 4/\log 5)$ vybereme číslo $x = -1$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $5 < 4$.
   Z intervalu $(-\log 4/\log 5, +\infty)$ vybereme číslo $x = 0$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $1 < 4$.
2. Z intervalu $(-\infty, -\sqrt{1-\log 2/\log 3})$vybereme číslo $x = -1$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $1 > 2$.
   Z intervalu $(-\sqrt{1-\log 2/\log 3}, \sqrt{1-\log 2/\log 3})$ vybereme číslo $x = 0$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $3 > 2$.
   Z intervalu $(\sqrt{1-\log 2/\log 3}, +\infty)$ vybereme číslo $x = 1$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $1 > 2$.
3. Z intervalu $[2/3, 1)$ vybereme číslo $x = 2/3$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $0 > 2$.
   Z intervalu $(1, +\infty)$ vybereme číslo $x = 2$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $2 > -2$.

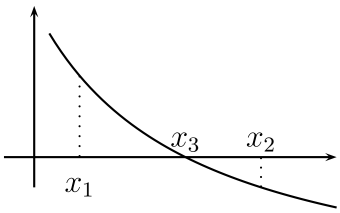
4. Z intervalu $(-\infty, 2)$ vybereme číslo $x = 0$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $\sqrt{5} > 5$.
   Z intervalu $(2, +\infty)$ vybereme číslo $x = 3$ a dosadíme do nerovnice. Dostaneme $\sqrt{14} > 2$.

V odstavci 6.3 vysvětlíme, že z platnosti či neplatnosti nerovnice v jednom bodě lze udělat závěr o její platnosti na celém intervalu. Dostaneme tak řešení našich nerovnic.

1. Nerovnice $0.2^x < 4$ má řešení $x \in (-\log 4/\log 5, +\infty)$.
2. Nerovnice $3^{1-x^2} > 2$ má řešení $x \in (-\sqrt{1-\log 2/\log 3}, \sqrt{1-\log 2/\log 3})$.
3. Nerovnice $\sqrt{3x-2} > 4 - 3x$ má řešení $x \in (1, +\infty)$.
4. Nerovnice $\sqrt{x^2+5} > 5 - x$ má řešení $x \in (2, +\infty)$.

6.2 Vlastnost nabývání mezihodnot elementárních funkcí

Všechny elementární funkce a tedy i funkce na stranách našich čtyř nerovnic jsou spojité. Jednou z důležitých vlastností spojitých funkcí je vlastnost nabývání mezihodnot, kterou si vysvětlíme na obrázku.



Pokud je funkce spojitá na intervalu I a pro $x_1 \in I$ platí $f(x_1) > 0$ a pro $x_2 \in I$ platí $f(x_2) < 0$, pak mezi body x_1 a x_2 leží bod x_3, pro nějž platí $f(x_3) = 0$.

Nás zajímá důsledek této vlastnosti: pokud v intervalu I neleží kořen funkce (to je bod s nulovou funkční hodnotou), pak mají všechny funkční hodnoty funkce f na intervalu I stejné znaménko.

Vlastnost nabývání mezihodnot se podle francouzského matematika Jean Gastona Darbouxe nazývá Darbouxovou vlastností.

Poznamenejme ještě, že podstatné je, že pracujeme s reálnými čísly a nikoliv s racionálními. Na racionálních číslech spojité funkce Darbouxovu vlastnost obecně nemají. Průsečík grafu s osou x nemusí být racionální číslo.

6.3 Aplikace Darbouxovy vlastnosti na nerovnice

Každou z nerovnic můžeme převést do tvaru s nulou na pravé straně.

1. $$0.2^x - 4 < 0$$

2.
$$3^{1-x^2} - 2 > 0$$

3.
$$\sqrt{3x-2} - (4-3x) > 0$$

4.
$$\sqrt{x^2+5} - (5-x) > 0$$

Splnění či nesplnění nerovnice v bodě x je pak ekvivalentní s tím, že má funkční hodnota na levé straně nerovnice příslušné znaménko. Použití vlastnosti nabývání mezihodnot pak zdůvodňuje správnost našeho postupu řešení nerovnic.

7 Monotonie funkcí a ekvivalentní úpravy při řešení nerovnic

Nerovnice
$$0.2^x < 4, \qquad 3^{1-x^2} > 2$$
se nabízí zlogaritmovat, nerovnice
$$\sqrt{3x-2} > 4-3x, \qquad \sqrt{x^2+5} > 5-x$$
umocnit. V dalším prozkoumáme za jakých podmínek jsou tyto úpravy ekvivalentní, tedy za jakých podmínek se těmito úpravami nezmění množina řešení nerovnice.

7.1 Logaritmování nerovnice

O logaritmické funkci při základu větším než jedna víme, že je rostoucí na svém definičním oboru, tedy na množině $(0,+\infty)$. To formálně zapíšeme
$$(\forall a,b \in (0,+\infty))((a<b) \Rightarrow (\log a < \log b)).$$
Ve skutečnosti můžeme nahradit implikaci ekvivalentní (v tomto textu to nebudeme dokazovat), tedy platí
$$(\forall a,b \in (0,+\infty))((a<b) \Leftrightarrow (\log a < \log b)).$$
Dosazením $a = 0.2^x$, $b = 4$ dostaneme (před dosazením je třeba ověřit, že je splněn předpoklad $a,b \in (0,+\infty)$)
$$(\forall x \in \mathbb{R})((0.2^x < 4) \Leftrightarrow x \log 0.2 < \log 4)).$$

Vydělením nerovnice záporným číslem $\log 0.2$ dostaneme

$$x > \frac{\log 4}{\log 0.2} = -\frac{\log 4}{\log 5}.$$

Podobně můžeme zlogaritmovat nerovnici (protože má na obou stranách výrazy nabývající kladných hodnot)

$$3^{1-x^2} > 2.$$

Dostaneme

$$(1 - x^2) \log 3 > \log 2$$

a po úpravě

$$x^2 < 1 - \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Na pravé straně kvadratické nerovnice je kladný výraz, nerovnice má tedy řešení

$$x \in \left(-\sqrt{1 - \frac{\log 2}{\log 3}}, \sqrt{1 - \frac{\log 2}{\log 3}} \right).$$

7.2 Umocňování nerovnice

Funkce $f : x \mapsto x^2$ je na intervalu $[0, +\infty)$ rostoucí, což formálně zapíšeme:

$$(\forall a, b \in [0, +\infty))((a < b) \Rightarrow (a^2 < b^2)).$$

Stejně jako pro logaritmování, i zde je možné nahradit implikaci ekvivalencí (ani toto nebudeme dokazovat). Platí tedy

$$(\forall a, b \in [0, +\infty))((a < b) \Leftrightarrow (a^2 < b^2)).$$

Umocňování nerovnice je tedy ekvivalentní operace v případě, že obě strany nerovnice nabývají nezáporných hodnot. V případě nerovnice

$$\sqrt{3x - 2} > 4 - 3x$$

jsou obě strany nezáporné pro $x \in I_1 := \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$. Vyřešením umocněné nerovnice $3x - 2 > (4 - 3x)^2$ dostaneme interval $(1, 2)$ a odtud dostaneme řešení na intervalu I_1

$$\{x \in I_1 : \sqrt{3x - 2} > 4 - 3x\} = I_1 \cap (1, 2) = \left(1, \frac{4}{3}\right].$$

K vyřešení nerovnice na $\mathbb{R}$ zbývá vyřešit ji na $\mathbb{R} \setminus I_1$, tedy na množině $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.

Na intervalu $I_2 := (-\infty, \frac{2}{3})$ nemá levá strana nerovnice smysl a tedy žádné $x \in I_2$ není kořenem nerovnice.

Na intervalu $I_3 := (\frac{4}{3}, +\infty)$ je levá strana nerovnice nezáporná zatímco pravá záporná. Protože libovolné nezáporné číslo je větší než libovolné záporné, formálně zapsáno

$$(\forall a \geq 0)(\forall b < 0)(a > b),$$

je nerovnice splněna pro každé $x \in I_3$.

Zjistili jsme, že na I_1 je řešením nerovnice interval $(1, \frac{4}{3}]$, na I_2 nemá nerovnice žádný kořen a všechna čísla z intervalu I_3 jsou řešením nerovnice. Výsledkem našeho výpočtu tedy je

$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x-2} > 4 - 3x\} = (1, \tfrac{4}{3}] \cup I_3 = (1, +\infty).$$

Vyřešme nyní nerovnici

$$\sqrt{x^2+5} > 5 - x.$$

Její levá strana je nezáporná pro všechna reálná x, pravá strana pro $x \leq 5$.

Na intervalu $I_1 = (-\infty, 5]$ je tedy umocnění nerovnice ekvivalentní úpravou. Po umocnění dostaneme nerovnici

$$x^2 + 5 > (5-x)^2$$

a po její úpravě nerovnici

$$5 > 25 - 10x,$$

která má řešení

$$x > 2.$$

průnik s intervalem $I_1 = (-\infty, 5]$ je interval $(2, 5]$.

Na intervalu $I_2 = (5, +\infty)$ je levá strana nerovnice kladná a pravá záporná, proto jsou všechna čísla z I_2 řešením nerovnice.

Výsledke našeho výpočtu je

$$\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+5} > 5 - x\} = (2, +\infty).$$

8 Další neřešené příklady

Následující příklady řešte všemi třemi výše uvedenými způsoby, tedy graficky, pomocí vlastnosti nabývání mezihodnot a úpravami. Přitom grafy kreslete nikoliv pomocí tabulky funkčních hodnot, ale ze znalosti průběhu daných funkcí. Jsou to přímky, části kuželoseček a grafy exponenciálních funkcí známého průběhu.

Všechna tři řešení proveďte nezávisle na sobě a porovnejte výsledky. V případě odchylky hledejte chybu. Doporučujeme nejdříve se zamyslet nad výsledky, provést nějakou zkoušku a zjistit tak, který z výsledků má šanci na to být správný (a mít tak tip na postup, ve kterém začnete chybu hledat).

1. $$\sqrt{x^2+3} > 3x - 1$$

2. $$\sqrt{7-x} \geq 1 - x$$

3. $$2x + \sqrt{12-2x} \leq 4$$

   Návod na grafické řešení: nerovnici upravte do tvaru, ve kterém bude snadnější nakreslit grafy stran nerovnice.

4. $$2^x > 20$$

5. $$2.22^x > 20$$

6. $$0.1^x > 12$$