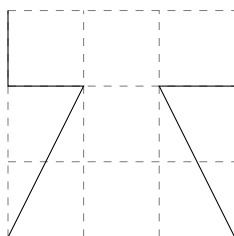


Písenná část zkoušky z AN1

13. ledna 2025

1. Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- Definujte funkce S , V , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h .
- Načrtněte graf funkce S .
- Výpočtete derivaci V' . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



1* Navíc napište geometrický/fyzikální význam rozdílu $V(h + \Delta h) - V(h)$ pro $h = 1$, $\Delta h \in (0, 2)$.

Co můžete z výsledků 1(a) říct o hodnotě podílu $\frac{V(1+\Delta h)-V(1)}{\Delta h}$ pro $\Delta h \in (0, 1)$?

2. Pro každou ze zadaných posloupností zjistěte, zda je monotonní, určete druh monotonie a svůj závěr řádně zdůvodněte (dokažte, že je posloupnost monotonní). Dále určete supremum množiny členů posloupnosti a svůj závěr zdůvodněte (dokažte, že vámi určené číslo je supremem množiny).

$$\left\{ \frac{2n+3}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{2n+5}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

2* Řešte úlohu pro posloupnosti

$$\left\{ \sqrt{\frac{2n+3}{n+2}} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \left(\frac{2n+5}{n+2} \right)^{12} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

3. Určete definiční obor funkce f a nalezněte intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

3* Řešte úlohu pro funkci

$$g(x) = f(x^2)$$

4. Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešte nerovnici

$$\sqrt{3x+4} \leq x$$

4* Vyřešte pomocí ekvivalentních úprav nerovnici

$$(\sqrt{3x+4})^6 \leq x^6$$

5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $a = 2$. Tečnu zakreslete do soustavy souřadné.

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-3}}$$

5* Napište Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě a . Jakou vzájemnou polohu mají jejich grafy?