Písemná část zkoušky z AN1

30. ledna 2025

1. Vypočtěte kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y. Na základě spočítaných kořenů určete obor hodnot funkce f a rozhodněte, zda je prostá. Vysvětlete, jak jste ke svým závěrům došli.

$$f(x) = \frac{10x - 20}{x^2 + 5}$$

1* Vyřešte úlohu 1 a na základě výsledků (nic dalšího nepočítejte) vyznačte do soustavy souřadné množiny bodů:

(a) Které neleží na grafu funkce f.

(b) Které leží na grafu funkce f.

(c) O kterých nelze rozhodnout, zda leží na grafu funkce f.

2. Vypočtěte limitu posloupnosti. Jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

$$\lim \frac{(2n-1)^2 + (n+1)^2 - 3(n-1)^2}{(3n+2)^2 - 5n^2}$$

2*

$$\lim \left(\frac{(2n-1)^2 + (n+1)^2 - 3(n-1)^2}{(3n+2)^2 - 5n^2} \right)^3$$

3. Načrtněte graf funkce f. Napište definici spojitosti funkce f v bodě $a = 1$, tuto definici znegujte a ukažte, že funkce f této negaci vyhovuje. Tedy f není spojitá v bodě a.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \in [-1, 1] \\ 3 - x & x \in (1, 3] \end{cases}$$

3* Napište definici spojitosti funkce f v bodě $b = 2$ a ukažte, že funkce f této definici vyhovuje.

4. Určete definiční obor funkce f a nalezněte intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = x + 1 - |x^2 - x - 2|$$

4*

$$f(x) = \big| x + 1 - |x^2 - x - 2| \big|$$

5. Zformulujte důsledek věty o kořeni spojité funkce. S použitím tohoto důsledku řešte nerovnici

$$2 - x \leq \sqrt{x}$$

5* Navíc načrtněte graf funkce f definované na intervalu $[0, 1]$ splňující

(a) $f(0) < 0$

(b) $f(1) > 0$

(c) $(\forall x \in [0, 1])(f(x) \neq 0)$