

Konvergentní a Cauchyovské posloupnosti (v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{Q}$)

Martina Šimůnková*

18. prosince 2025

Obsah

1	Úvod a motivace	1
2	Konvergentní posloupnosti	2
3	Cauchyovské posloupnosti	2
4	Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská	2
5	Ekvivalence v $\mathbb{R}$: Cauchyovská $\Leftrightarrow$ konvergentní	3
6	Proč ekvivalence neplatí v $\mathbb{Q}$	4
6.1	Symbol dolní celé části	4
6.2	Cauchyovská v $\mathbb{Q}$, ale ne konvergentní v $\mathbb{Q}$	4
6.3	Dvě racionální posloupnosti s iracionální limitou	4
7	Důkaz, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo	5
8	Metoda vzniku textu	5

1 Úvod a motivace

V analýze se často setkáváme se dvěma formálními způsoby, jak popsat „stabilizaci“ členů posloupnosti:

- **Konvergence** vyjadřuje, že členy posloupnosti se blíží ke konkrétnímu číslu (limitě).
- **Cauchyovská vlastnost** vyjadřuje, že členy posloupnosti jsou pro velké indexy navzájem libovolně blízko, aniž by se limita předem jmenovala.

V množině reálných čísel $\mathbb{R}$ jsou tyto pojmy ekvivalentní (jde o projev *úplnosti* $\mathbb{R}$). V množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ tato ekvivalence selhává: existují Cauchyovské posloupnosti racionálních čísel, které v $\mathbb{Q}$ nemají limitu.

*Text vznikl ve spolupráci s LLM ChatGPT.

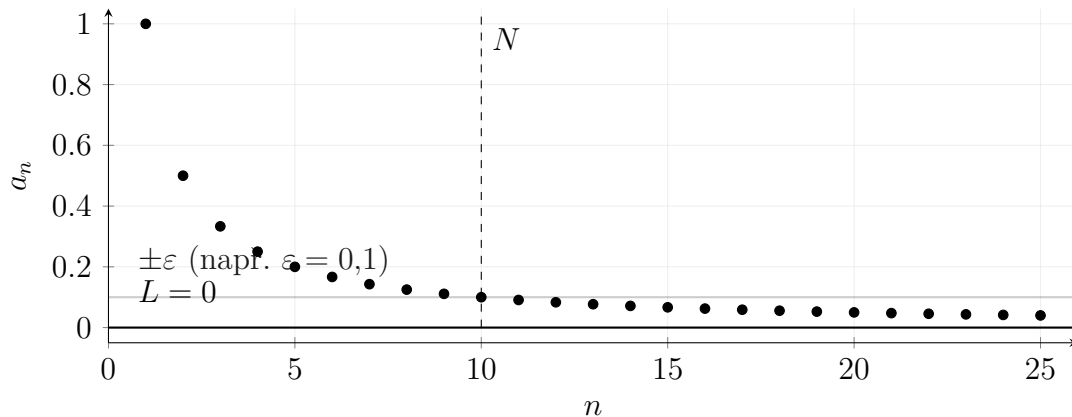
2 Konvergentní posloupnosti

Definice 1 (Konvergentní posloupnost). Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel je *konvergentní* (v $\mathbb{R}$), jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ s vlastností

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Číslo L nazýváme *limitou* posloupnosti a píšeme $a_n \rightarrow L$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Ilustrace konvergence: $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$



Obrázek 1: Od určitého indexu N leží všechny členy v libovolně úzkém pásu kolem přímky $y = L$.

3 Cauchyovské posloupnosti

Definice 2 (Cauchyovská posloupnost). Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel je *Cauchyovská*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \geq N$ platí

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Poznámka 1. Cauchyovská definice nezmiňuje žádné konkrétní číslo L . V $\mathbb{R}$ však úplnost zaručuje, že takové L existuje a posloupnost k němu konverguje.

4 Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská

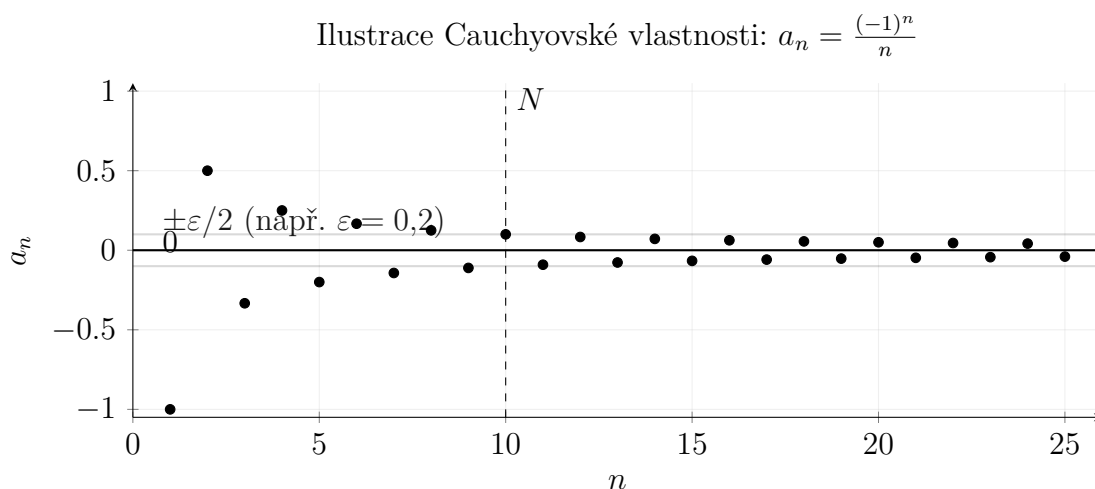
Věta 1. Je-li posloupnost (a_n) konvergentní v $\mathbb{R}$, pak je Cauchyovská.

Důkaz. Nechť $a_n \rightarrow L$. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice konvergence pro $\varepsilon/2$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Do trojúhelníkové nerovnosti $|x + y| \leq |x| + |y|$ dosadíme $x = a_n - L$, $y = -a_m + L$ a po úpravách

$$\begin{aligned} |x + y| &= |a_n - L - a_m + L| = |a_n - a_m| \\ |y| &= |-a_m + L| = |-(a_m - L)| = |a_m - L| \end{aligned}$$



Obrázek 2: Ačkoli posloupnost osciluje, amplituda klesá a „ocas“ se vzájemně zhušťuje: pro velká m, n je $|a_m - a_n|$ malé.

dostaneme pro libovolná $m, n \geq N$

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy (a_n) je Cauchyovská. □

5 Ekvivalence v $\mathbb{R}$: Cauchyovská $\Leftrightarrow$ konvergentní

Věta 2 (Úplnost $\mathbb{R}$ ve tvaru Cauchyova kritéria). Posloupnost reálných čísel je konvergentní právě tehdy, když je Cauchyovská.

Důkaz. Směr „konvergentní $\Rightarrow$ Cauchyovská“ plyne z předchozí věty.

Dokažme „Cauchyovská $\Rightarrow$ konvergentní“. Nechť (a_n) je Cauchyovská.

1) Cauchyovská posloupnost je omezená. Zvolme $\varepsilon = 1$. Existuje N takové, že pro všechna $m, n \geq N$ platí $|a_m - a_n| < 1$. Fixujme $n = N$. Pro $m \geq N$ dostaneme

$$|a_m| \leq |a_m - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|,$$

tedy ocas posloupnosti je omezený; a konečně mnoho počátečních členů je omezených také, takže celá posloupnost je omezená.

2) Existence konvergentní podposloupnosti. Z omezenosti a věty Bolzano–Weierstrass plyne, že existuje konvergentní podposloupnost (a_{n_k}) a číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_{n_k} \rightarrow L$.

3) Konvergence celé posloupnosti. Nechť $\varepsilon > 0$. Z Cauchyovskosti existuje N_1 tak, že pro všechna $m, n \geq N_1$ platí $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$. Z konvergence podposloupnosti existuje K tak, že pro $k \geq K$ je $|a_{n_k} - L| < \varepsilon/2$ a zároveň (pro dost velké k) platí $n_k \geq N_1$. Pro libovolné $n \geq N_1$ pak:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $a_n \rightarrow L$ a posloupnost je konvergentní. □

6 Proč ekvivalence neplatí v $\mathbb{Q}$

V $\mathbb{Q}$ ponecháme stejnou vzdálenost $|x - y|$ jako v $\mathbb{R}$, ale množina $\mathbb{Q}$ není úplná: některé „přirozené“ limity Cauchyovských posloupností jsou iracionální a tedy v $\mathbb{Q}$ neleží.

6.1 Symbol dolní celé části

Definice 3 (Dolní celá část). Pro reálné číslo x označujeme symbolem $\lfloor x \rfloor$ *dolní celou část*, tj. největší celé číslo, které není větší než x :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

6.2 Cauchyovská v $\mathbb{Q}$, ale ne konvergentní v $\mathbb{Q}$

Uvažujme posloupnost racionálních čísel

$$b_n = 10^{-n} \lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor.$$

Každý člen je racionální (celé číslo dělené mocninou deseti). Z vlastností dolní celé části platí

$$\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor \leq 10^n \sqrt{2} < \lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor + 1.$$

Po vynásobení 10^{-n} dostaneme

$$b_n \leq \sqrt{2} < b_n + 10^{-n},$$

tedy

$$0 \leq \sqrt{2} - b_n < 10^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Proto v $\mathbb{R}$ platí $b_n \rightarrow \sqrt{2}$. V důsledku toho je (b_n) v $\mathbb{R}$ konvergentní, a tedy Cauchyovská. Jelikož Cauchyovská podmínka pracuje pouze s výrazy $|b_m - b_n|$ (které mají stejnou hodnotu v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{Q}$), je (b_n) Cauchyovská i jako posloupnost v $\mathbb{Q}$.

V $\mathbb{Q}$ však konvergentní být nemůže: kdyby $b_n \rightarrow q$ pro nějaké $q \in \mathbb{Q}$, pak by jako reálná posloupnost měla limitu q ; přitom jsme ukázali, že její reálná limita je $\sqrt{2}$. Jednoznačnost limity by vynutila $q = \sqrt{2}$, což je nemožné, protože $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (důkaz níže).

6.3 Dvě racionální posloupnosti s iracionální limitou

1) Posloupnost $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Každý člen a_n je racionální. V $\mathbb{R}$ platí klasický limitní vztah

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e,$$

kde e je Eulerovo číslo (známý fakt: e je iracionální). Proto je (a_n) konvergentní v $\mathbb{R}$, a tedy Cauchyovská v $\mathbb{R}$. Jelikož její členy jsou racionální, je (a_n) Cauchyovská také v $\mathbb{Q}$, ale v $\mathbb{Q}$ konvergentní není (její reálná limita neleží v $\mathbb{Q}$).

2) Posloupnost $b_n = 10^{-n} \lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor$. Jak bylo ukázáno výše, v $\mathbb{R}$ platí $b_n \rightarrow \sqrt{2}$, tedy (b_n) je v $\mathbb{R}$ konvergentní a Cauchyovská. Protože členy jsou racionální, je Cauchyovská i v $\mathbb{Q}$. Není však konvergentní v $\mathbb{Q}$, neboť její limita je iracionální.

7 Důkaz, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo

Věta 3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz. Důkaz sporem. Předpokládejme, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pro nějaká nesoudělná celá čísla p, q (tj. $\gcd(p, q) = 1, q \neq 0$). Po umocnění dostaneme

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Z rovnosti $p^2 = 2q^2$ plyne, že p^2 je sudé, a tedy i p je sudé. Napišme $p = 2k$. Potom

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2,$$

a tedy i q je sudé. Pak však p i q mají společný dělitel 2, což je spor s $\gcd(p, q) = 1$. Tedy $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

8 Metoda vzniku textu

Text vznikl ve spolupráci s LLM ChatGPT verze 5.2 na základě následujících promptů.

1. Píšu učební text pro studenty učitelství matematiky. Téma jsou konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Uveď definici obou pojmů, obě definice ilustruj na grafech posloupnosti. Pak dokaž větu, která tvrdí, že každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská. Dále dokaž větu, že posloupnost reálných čísel je konvergentní právě když je Cauchyovská. Na závěr uveď příklad, který ukazuje, že na množině racionálních čísel tato věta neplatí. A uveď příklady dvou posloupností racionálních čísel, které mají iracionální limitu, jedna je $a_n = (1 + 1/n)^n$, druhá $b_n = 10^{\lfloor -n \rfloor}$ krát dolní celá část z $(10^n \sqrt{2})$. Vysvětli, že tyto posloupnosti jsou konvergentní na množině reálných čísel, jsou tedy Cauchyovské na množině reálných čísel, a protože jejich členy jsou racionální čísla, jsou Cauchyovské i na množině racionálních čísel. Jejich limity jsou iracionální čísla, proto nejsou konvergentní na množině racionálních čísel. Součástí textu je i důkaz, že odmocnina ze dvou není racionální číslo. Nejdříve si celý text rozvrhni do kapitol a poté ho sepiš.

2. Do textu přidej vysvětlení symbolu pro dolní celou část.

Text vysázej v latexu a přidej obrázky ilustrující konvergentní a Cauchyovskou posloupnost. Obrázky vytvoř pomocí balíku tikz a vlož je na začátek textu hned za definice konvergentní a Cauchyovské posloupnosti.

Na základě dotazu při online konzultaci jsem v důkazu Věty 1 doplnila:
Do trojúhelníkové nerovnosti $|x + y| \leq |x| + |y|$ dosadíme $x = a_n - L, y = -a_m + L$ a po úpravách

$$\begin{aligned} |x + y| &= |a_n - L - a_m + L| = |a_n - a_m| \\ |y| &= |-a_m + L| = |-(a_m - L)| = |a_m - L| \end{aligned}$$

dostaneme pro libovolná $m, n \geq N \dots$