

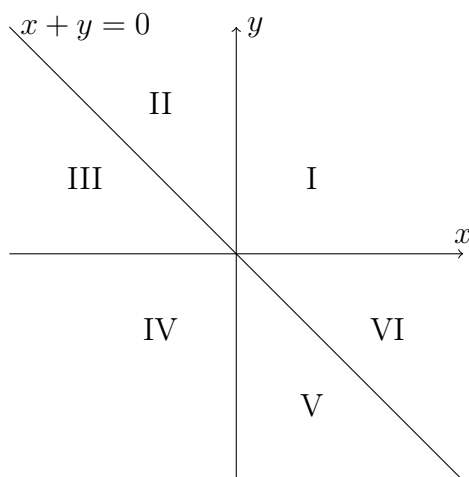
Trojúhelníková nerovnost

Studijní materiál pro studenty učitelství matematiky

18. prosince 2025

Trojúhelníková nerovnost

Nazýváme tak nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$, která platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Její platnost dokážeme rozбором případů a odstraněním absolutní hodnoty. Souřadnou rovinu rozdělíme na šest částí.



Ukážeme platnost v částech I, III, další části necháme čtenáři jako cvičení.

- I. Zde je $x \geq 0$, $y \geq 0$, proto je $|x| = x$, $|y| = y$, $|x + y| = x + y$ a tedy platí $|x + y| = |x| + |y|$.
- III. Zde je $x \leq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 0$ proto je $|x| = -x$, $|y| = y$, $|x + y| = -x - y$. Levá strana trojúhelníkové nerovnosti je tedy $L = |x + y| = -x - y$, pravá strana $P = |x| + |y| = -x + y$.

Protože je $y \geq 0$, je $y \geq -y$, tedy je

$$L = -x - y \leq -x + y = P$$

a proto v části III trojúhelníková nerovnost platí.

Trojúhelníková nerovnost pro tři sčítance. Dvojnásobným použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|(x + y) + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$$

Trojúhelníková nerovnost pro čtyři sčítance. Nejdřív použijeme trojúhelníkovou nerovnost pro dva sčítance

$$|(x_1 + x_2 + x_3) + x_4| \leq |x_1 + x_2 + x_3| + |x_4|$$

a následně pro tři sčítance

$$|x_1 + x_2 + x_3| + |x_4| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$$

odkud dostáváme

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$$

Cvičení. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro deset sčítanců.

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_9 + x_{10}| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_9| + |x_{10}|$$

Trojúhelníkovou nerovnost pro n sčítanců dokážeme matematickou indukcí.

1. Pro nejmenší hodnotu $n = 2$ jsme nerovnost dokázali výše.
2. Předpokládáme, že pro n sčítanců nerovnost platí.

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

K oběma stranám přičteme $|x_{n+1}|$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}| \quad (1)$$

Použijeme nerovnost pro dva sčítance

$$|(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| + |x_{n+1}| \quad (2)$$

Z (1), (2) plyne nerovnost pro $n + 1$ sčítanců

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |x_{n+1}|$$