

Weierstrassova věta o nabývání extrémů

Nechť máme reálnou funkci jedné reálné proměnné definovanou na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Zajímá nás, za jakých podmínek můžeme zaručit existenci globálního minima a globálního maxima.

Větu uvedeme bez důkazu. Budeme ji ilustrovat příklady. Uvedeme i příklady funkcí, které ukáží oprávněnost předpokladů věty.

Věta (Weierstrassova). *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřeném a omezeném intervalu $[a, b]$. Pak existují body $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ takové, že*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{pro všechna } x \in [a, b].$$

Jinými slovy, funkce f na intervalu $[a, b]$ nabývá svého globálního minima i globálního maxima.

Hodnota $f(x_{\max})$ se nazývá globální maximum funkce f na $[a, b]$, hodnota $f(x_{\min})$ globální minimum. Body $x_{\max}$ a $x_{\min}$ mohou ležet jak uvnitř intervalu, tak v jeho krajních bodech.

Pozitivní příklady (když jsou předpoklady splněny)

Příklad 1: maximum uvnitř intervalu

Funkce

$$f(x) = -(x - 1)^2 + 2, \quad x \in [0, 2],$$

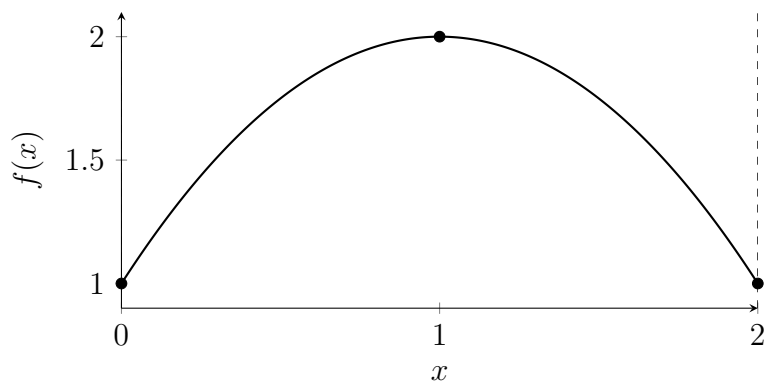
je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu. Nabývá globálního maxima ve vnitřním bodě $x = 1$ a globálního minima v krajních bodech $x = 0$ a $x = 2$.

Příklad 2: extrémy v krajních bodech

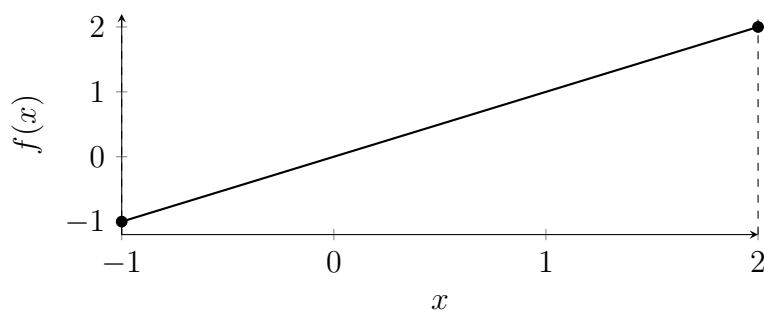
Funkce

$$f(x) = x, \quad x \in [-1, 2],$$

je spojitá a rostoucí. Proto globální minimum leží v levém krajním bodě $x = -1$ a globální maximum v pravém krajním bodě $x = 2$.



Obrázek 1: Spojitá funkce na $[0, 2]$ s globálním maximem uvnitř intervalu v bodě $x = 1$.



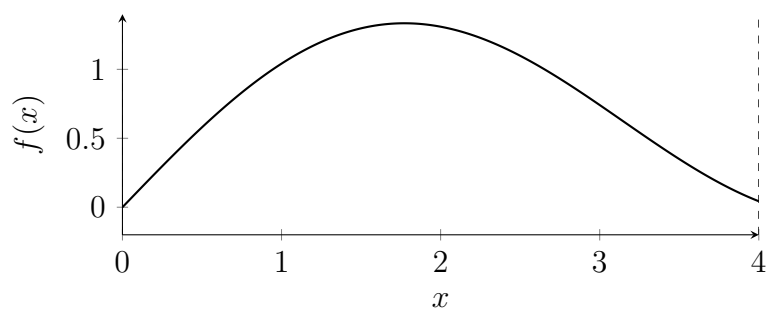
Obrázek 2: Spojitá lineární funkce na $[-1, 2]$ s extrémy v krajních bodech.

Příklad 3: „zvlněná“ funkce

Funkce

$$f(x) = \sin x + 0.2x, \quad x \in [0, 4],$$

je spojitá a na obrázku je vidět, že na uzavřeném omezeném intervalu existuje globální minimum i globální maximum (mohou se nacházet ve vnitřních bodech i v krajních bodech).



Obrázek 3: Spojitá funkce na $[0, 4]$ s existencí globálních extrémů.

Příklady ilustrující oprávněnost předpokladů věty

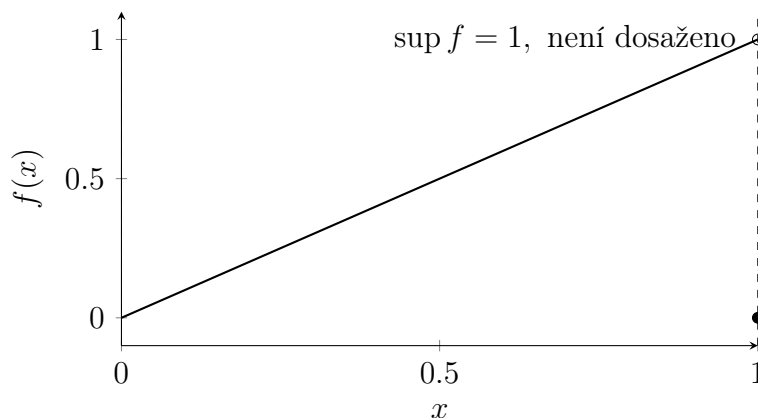
Následující tři příklady ukazují, že pokud vypustíme některý z předpokladů (ze spojitosti, uzavřenosti či omezenosti intervalu), existence globálních extrémů už nemusí být zaručena.

Příklad 4: nespojitá funkce na uzavřeném omezeném intervalu

Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases} \quad x \in [0, 1].$$

Interval $[0, 1]$ je uzavřený a omezený, ale funkce je nespojitá v bodě $x = 1$. Hodnoty $f(x)$ se blíží k 1, ale hodnoty rovné 1 funkce nikdy nedosáhne, takže nemá globální maximum.



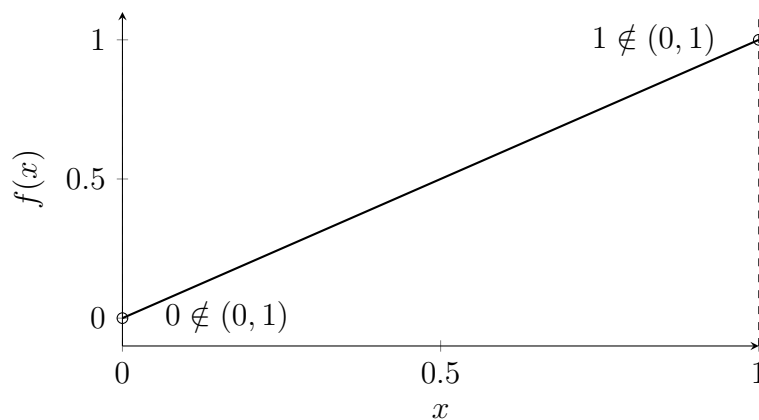
Obrázek 4: Nespojitá funkce na $[0, 1]$: globální maximum neexistuje.

Příklad 5: spojitá funkce na otevřeném omezeném intervalu

Nyní vezměme spojitou funkci

$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1).$$

Interval $(0, 1)$ je omezený, ale není uzavřený. Hodnoty funkce se blíží k 0 i k 1, ale těchto hodnot funkce nikdy nedosáhne, protože body 0 a 1 nepatří do intervalu. Globální minimum ani maximum tedy na tomto intervalu neexistuje.



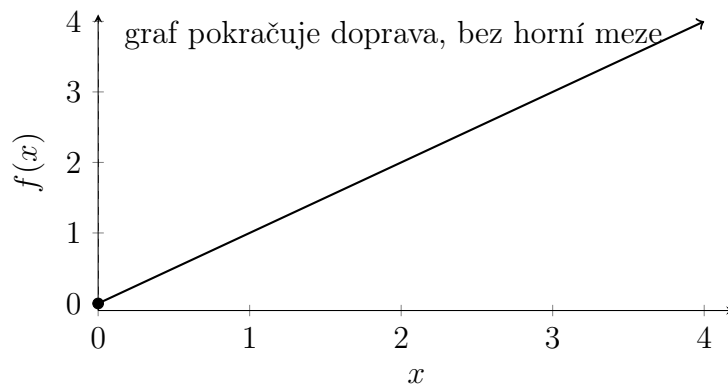
Obrázek 5: Spojitá funkce na otevřeném intervalu $(0, 1)$: žádné globální extrémy.

Příklad 6: spojitá funkce na neomezeném intervalu

Nakonec uvažujme funkci

$$f(x) = x, \quad x \in [0, \infty).$$

Funkce je spojitá a interval je uzavřený, ale není omezený. Funkce má sice globální minimum v bodě $x = 0$, ale není shora omezená, takže globální maximum neexistuje.



Obrázek 6: Spojitá funkce na neomezeném intervalu $[0, \infty)$: neexistuje maximum.