

Dokument obsahuje úlohy na porozumění grafu funkce, konkrétně probereme kvadratickou funkci.

Zadání je zformulované dvakrát, je tedy jedno, kterou stranu budete řešit.

Varianta 1: Přímé a srozumitelné zadání

Předmět: Úvodní úloha z matematické analýzy: Analýza a kreslení paraboly

Pro zadanou kvadratickou funkci $f(x) = x^2 - 5x + 3$ provedeme kroky, které nám pomohou detailně pochopit její vlastnosti a nakreslit její graf.

(i) Průsečík s osou y :

Nejprve určete, kde graf funkce protíná osu y . Vypočítejte funkční hodnotu v bodě $x = 0$, kterou označíme jako $a = f(0)$. Do soustavy souřadnic zakreslete tento bod $A[0, a]$.

(ii) Nalezení symetrického bodu:

Nyní vyřešte rovnici $f(x) = a$, kde a je hodnota, kterou jste vypočítali v předchozím kroku. Tím najdete všechny body na grafu, které mají stejnou y -ovou souřadnici jako průsečík s osou y . Řešení označte jako x_1 a x_2 .

(iii) Zakreslení bodů:

Do stejné soustavy souřadnic zakreslete body $B[x_1, a]$ a $C[x_2, a]$, které jste našli v předchozím kroku.

(iv) Ověření polohy bodů na grafu:

Stručně definujte, co to znamená, že bod leží na grafu funkce. Poté zdůvodněte, proč pro body B a C platí, že leží na grafu funkce f .

(v) Určení osy symetrie:

Grafem kvadratické funkce je parabola, která je symetrická. Využijte symetrické polohy bodů B a C k nalezení rovnice svislé osy symetrie paraboly.

(vi) Nalezení vrcholu paraboly:

Vrchol paraboly vždy leží na její ose symetrie. Pomocí rovnice osy, kterou jste právě našli, vypočítejte souřadnice vrcholu paraboly.

(vii) Načrtnutí grafu:

Využijte všechny zjištěné informace, průsečík s osou y , symetrické body B a C , osu symetrie a vrchol, k co nejpřesnějšímu načrtnutí grafu funkce f .

(viii) Hledání vzorů pro danou y -ovou hodnotu:

Nyní prozkoumejte, jaké x -ové souřadnice odpovídají zadané y -ové hodnotě. Vyřešte rovnici $f(x) = k$ pro následující hodnoty k a geometricky interpretujte výsledek na grafu.

(a) Pro $k = -1$. Nalezněte příslušné body na grafu.

(b) Pro $k = -3.25$. Jaký speciální bod paraboly jste našli?

- (c) Pro $k = -5$. Vysvětlete, proč rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel a co to znamená pro graf funkce.

(ix) Obecná diskuze o počtu řešení:

Proveďte diskuzi o počtu řešení rovnice $f(x) = k$ v závislosti na reálném parametru k . Určete, pro které hodnoty k má rovnice dvě řešení, jedno řešení, nebo žádné reálné řešení. Své závěry porovnejte s grafem funkce a y -ovou souřadnicí vrcholu.

(x) Vyjádření kořenů v závislosti na parametru:

Pro případy, kdy má rovnice $f(x) = k$ reálné řešení (viz předchozí bod), odvoďte obecný vzorec pro výpočet těchto kořenů v závislosti na parametru k .

Varianta 2: Více proaktivní zadání

Předmět: Průzkum kvadratické funkce krok za krokem

Vítejte v matematické analýze! Začneme společným prozkoumáním funkce $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Naším cílem je odhalit její klíčové vlastnosti a na základě toho přesně načrtnout její graf.

1. *Kde to všechno začíná? Průsečík s osou y .*

Každý graf musí někde protnout osu y . Najdeme tento bod.

- Vypočítejte hodnotu $a = f(0)$ a zakreslete bod $A[0, a]$ do souřadnicového systému.

2. *Hledání symetrie: Najděte „dvojče“ k průsečíku.*

Paraboly jsou krásně symetrické. Bod, který jsme našli, musí mít na druhé straně paraboly své „dvojče“ se stejnou y -ovou souřadnicí.

- Vyřešte rovnici $f(x) = a$ (kde a je hodnota z kroku 1), abyste našli x -ové souřadnice obou těchto bodů.
- Nalezené body B a C rovněž запиšte a zakreslete do grafu.

3. *Co znamená „být na grafu“?*

Krátké teoretické zastavení.

- Napište vlastními slovy, co musí platit pro souřadnice bodu $[x_0, y_0]$, aby tento bod ležel na grafu funkce f .

4. *Ověření našich bodů.*

A teď se vraťme k bodům, které jsme našli.

- Na základě vaší definice stručně zdůvodněte, proč je jisté, že body B a C , které jste našli v kroku 2, leží na grafu funkce f .

5. *Srdce paraboly: Osa symetrie.*

Středem mezi symetrickými body B a C prochází osa celé paraboly.

- Na základě souřadnic bodů B a C odvoďte rovnici této osy.

6. *Nejdůležitější bod: Vrchol.*

Na ose symetrie leží ten nejdůležitější bod paraboly – její vrchol.

- S využitím rovnice osy symetrie vypočítejte souřadnice vrcholu.

7. *Dejme to dohromady: Finální skica.*

Nyní máme všechny klíčové informace.

- Použijte vypočtené body (průsečík A , symetrický bod C , vrchol) a osu symetrie k načrtnutí co nejpřesnějšího grafu funkce f .

8. *Zpětný pohled: Kolik x -ových hodnot odpovídá jedné y -ové hodnotě?*

Nyní, když máme graf, pojďme prozkoumat, kolik x -ových hodnot (vzorů) může odpovídat jedné dané y -ové hodnotě. Vyřešte rovnici $f(x) = k$ pro následující případy a své algebraické výsledky porovnejte s nákresem.

- Pro $k = -1$: Měli byste najít dvě řešení. Které dva body na grafu jim odpovídají?
- Pro $k = -3.25$: Našli jste pouze jedno řešení. Proč? O jaký význačný bod se jedná?
- Pro $k = -5$: Zde reálné řešení neexistuje. Jak se tento fakt projeví na grafu? Protíná vodorovná přímka $y = -5$ naši parabolu?

9. *Pohled z vyšší perspektivy: Kdy existuje řešení?*

Nyní zobecníme naši předchozí úvahu. Místo konkrétních čísel použijeme obecnou hodnotu k .

- Analyzujte, kolik řešení má rovnice $f(x) = k$ v závislosti na hodnotě k .
- Pro jaké hodnoty k najdeme dva různé body? Kdy existuje právě jeden bod (a který to je)? A kdy se přímka $y = k$ s parabolou vůbec nepotká?
- Jak souvisí tato analýza s y -ovou souřadnicí vrcholu paraboly, který jste již našli?

10. *Univerzální klíč: Vzorec pro kořeny.*

Pojďme naše zkoumání završit nalezením obecného vzorce.

- Pro ty hodnoty k , pro které existuje řešení, odvoďte vzorec, který přímo vy počítá odpovídající x -ové souřadnice.
- Ukažte, jak podmínka existence reálných kořenů v tomto vzorci souvisí s vašimi závěry z předchozího bodu.