

Základní pojmy z matematické analýzy: Funkce a vlastnosti funkcí

Definice 1 (Funkce). Reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále jen funkcí) rozumíme dvojici (D, f) , kde:

- $D \subseteq \mathbb{R}$ je neprázdná množina, kterou nazýváme **definiční obor** funkce.
- f je pravidlo (předpis), které každému prvku $x \in D$ přiřazuje **právě jedno** reálné číslo $y \in \mathbb{R}$.

Číslo y nazýváme **funkční hodnotou** v bodě x a značíme ho $f(x)$. Píšeme $y = f(x)$. Dále říkáme, že y je **obrazem** čísla x a x je **vzorem** čísla y .

Poznámka: Ačkoliv je funkce formálně definována jako dvojice (D, f) , v praxi často mluvíme zjednodušeně o "funkci f ". Definiční obor D je v takovém případě buď zřejmý z kontextu, nebo je jím myšlena maximální množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz $f(x)$ smysl.

Definice 2 (Obor hodnot). **Oborem hodnot** funkce f s definičním oborem D rozumíme množinu všech funkčních hodnot. Značíme ji $H(f)$ nebo jen H .

Formálně obor hodnot zapisujeme:

$$H = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in D)(y = f(x))\}$$

Tento zápis čteme: "Obor hodnot H je množina všech reálných čísel y , pro která existuje x z definičního oboru D takové, že $y = f(x)$."

Stručnější, ekvivalentní zápis je:

$$H = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Tento zápis čteme: "Obor hodnot H je množina všech prvků tvaru $f(x)$, kde x probíhá celý definiční obor D ."

Definice 3 (Graf funkce). **Grafem funkce** f s definičním oborem D rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$, kde $x \in D$. Graf značíme $G(f)$ nebo jen G .

Formální zápis:

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in D) \wedge (y = f(x))\}$$

Tento zápis čteme: "Graf funkce je množina všech bodů $[x, y]$ v rovině $\mathbb{R}^2$ takových, že x patří do definičního oboru D a zároveň platí, že souřadnice y je rovna funkční hodnotě $f(x)$."

Poznámka: Symbol logické spojky "a zároveň" ($\wedge$) se při zápisu množin často nahrazuje čárkou. Graf funkce tedy můžeme zapsat i jako:

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\}$$

Definice 4 (Prostá funkce). Řekneme, že funkce f je **prostá** na svém definičním oboru $D(f)$, jestliže pro každé dva různé prvky $x_1, x_2 \in D(f)$ jsou jejich obrazy také různé. Tedy platí implikace:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Tento formální výrok čteme: "Pro všechna x_1, x_2 z definičního oboru funkce platí, že pokud je x_1 různé od x_2 , pak je $f(x_1)$ různé od $f(x_2)$."

Poznámka (obměněná implikace): Výše uvedená implikace je logicky ekvivalentní s její obměnou, která říká, že pokud jsou si rovny funkční hodnoty, musí si být rovny i jejich vzory. Tento tvar je v praxi často snazší ověřit.

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Celou definici lze tedy ekvivalentně zapsat jako:

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

Definice 5 (Rostoucí funkce). Nechť f je funkce a M je podmnožina jejího definičního oboru ($M \subseteq D(f)$).

Řekneme, že funkce f je **rostoucí na množině** M , jestliže pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí implikace:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

Tento formální výrok čteme: "Pro všechna x_1, x_2 z množiny M platí, že pokud je x_1 menší než x_2 , pak je $f(x_1)$ menší než $f(x_2)$."

Definice 6 (Maximum funkce na množině). Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in M$ **maximum na množině** M , jestliže pro všechna $x \in M$ platí nerovnost:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Hodnotu $f(x_0)$ pak nazýváme maximem funkce f na množině M .

Zápis pomocí kvantifikátorů existence maxima:

$$(\exists x_0 \in M)(\forall x \in M)(f(x) \leq f(x_0))$$

Tento formální výrok čteme: "Existuje prvek x_0 v množině M takový, že pro všechny prvky x z množiny M platí, že $f(x)$ je menší nebo rovno $f(x_0)$."

Definice 7 (Okolí bodu). Necht' $x_0 \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ je libovolné kladné reálné číslo.

δ -**okolím bodu** x_0 rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Značíme jej $O_\delta(x_0)$ nebo jednodušeji $O(x_0)$, pokud konkrétní velikost δ není podstatná.

Formální zápis:

$$O(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

Definice 8 (Lokální maximum). Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna x z průniku tohoto okolí a definičního oboru platí:

$$\forall x \in O(x_0) \cap D(f) : f(x) \leq f(x_0)$$

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\exists O(x_0))(\forall x \in O(x_0) \cap D(f))(f(x) \leq f(x_0))$$

Tento formální výrok čteme: "Existuje okolí $O(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna x patřící do tohoto okolí a zároveň do definičního oboru funkce platí, že $f(x)$ je menší nebo rovno $f(x_0)$."

Definice 9 (Funkce omezená zdola). Necht' f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce

f je **omezená zdola na množině** M , jestliže existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $x \in M$ platí nerovnost:

$$f(x) \geq d$$

Číslo d nazýváme **dolním odhadem** (nebo dolní závorou) funkce f na množině M .

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(f(x) \geq d)$$

Tento formální výrok čteme: "Existuje reálné číslo d takové, že pro všechna x z množiny M platí, že funkční hodnota $f(x)$ je větší nebo rovna d ."

Definice 10 (Funkce omezená shora). Necht' f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že

funkce f je **omezená shora na množině** M , jestliže existuje reálné číslo h takové, že pro všechna $x \in M$ platí nerovnost:

$$f(x) \leq h$$

Číslo h nazýváme **horním odhadem** (nebo horní závorou) funkce f na množině M .

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(f(x) \leq h)$$

Tento formální výrok čteme: "Existuje reálné číslo h takové, že pro všechna x z množiny M platí, že funkční hodnota $f(x)$ je menší nebo rovna h ."

Definice 11 (Omezená funkce). Necht' f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je **omezená na množině** M , jestliže je na této množině omezená zdola i shora.

Ekvivalentní definice: Funkce f je omezená na množině M , jestliže existuje kladné reálné číslo K takové, že pro všechna $x \in M$ platí:

$$|f(x)| \leq K$$

Poznámka: Tato nerovnost je ekvivalentní zápisu $-K \leq f(x) \leq K$. To znamená, že všechny funkční hodnoty na množině M leží v intervalu $[-K, K]$.

Zápis pomocí kvantifikátorů:

$$(\exists K \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K)$$

Tento formální výrok čteme: "Existuje kladné reálné číslo K takové, že pro všechna x z množiny M je absolutní hodnota funkční hodnoty $f(x)$ menší nebo rovna K ."