

Možná řešení úlohy z matematické analýzy pro studenty učitelství matematiky, FP TUL

Na jedné úloze vysvětlíme možné přístupy řešení v písemné části zkoušky. Přístupy se liší v komentářích postupu. Vhodným komentářem projevíte znalosti teorie a můžete získat body k ústní zkoušce.

Zadání úlohy: Určete definiční obor funkce f a najděte intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 2x + 4}$$

Řešení úlohy: „středoškolský styl“. (Obsahuje výpočty a závěr. Nezdůvodňuje zvolený postup.)

Definiční obor:

$$x^2 - 2x + 4 \neq 0, \quad x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0 \quad \text{pro všechna } x.$$

Proto

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Monotónnost: spočteme derivaci

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 2x + 4}, \quad f'(x) = \frac{(-3)(x^2 - 2x + 4) - (-3x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Upravíme čitatel:

$$(-3)(x^2 - 2x + 4) + 3x(2x - 2) = -3x^2 + 6x - 12 + 6x^2 - 6x = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4).$$

Tedy

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{3(x - 2)(x + 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Jelikož jmenovatel je kladný, znaménko $f'(x)$ určuje $(x - 2)(x + 2)$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ nebo } x > 2, \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Závěr: f je rostoucí na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$.

Řešení úlohy: „vysokoškolský styl“. (Kromě výpočtů a závěru obsahuje i zdůvodnění postupu.)

Určení definičního oboru je středoškolská látka, můžete ho tedy napsat stejně jako je uvedeno v předchozím řešení.

Komentáře se liší především ve zdůvodnění postupu hledání intervalů, na nichž je funkce rostoucí:

Pro hledání intervalů, na nichž je funkce monotónní použijeme postačující podmínku: má-li f kladnou derivaci $f'(x) > 0$ pro všechna x v intervalu, pak je f na tomto intervalu rostoucí.

Na $\mathbb{R}$ je f diferencovatelná (jmenovatel je všude nenulový), spočteme tedy derivaci pomocí pravidla pro derivaci podílu:

$$f(x) = \frac{-3x}{x^2 - 2x + 4}, \quad f'(x) = \frac{(-3)(x^2 - 2x + 4) - (-3x)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Úpravou čitatele:

$$(-3)(x^2 - 2x + 4) + 3x(2x - 2) = -3x^2 + 6x - 12 + 6x^2 - 6x = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4).$$

Tedy

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{3(x - 2)(x + 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

Ve jmenovateli je druhá mocnina, navíc $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$, proto

$$(x^2 - 2x + 4)^2 > 0 \quad \text{pro všechna } x,$$

a znaménko derivace určuje pouze výraz $(x - 2)(x + 2)$.

Kritické body jsou řešení $f'(x) = 0$, tedy $x = \pm 2$. Pro znaménka:

$$(x - 2)(x + 2) > 0 \text{ na } (-\infty, -2) \cup (2, \infty), \quad (x - 2)(x + 2) < 0 \text{ na } (-2, 2).$$

Z věty o monotónnosti plyne:

$$f \text{ je rostoucí na } (-\infty, -2) \text{ a } (2, \infty), \quad \text{klesající na } (-2, 2).$$

Řešení úlohy: „vysokoškolský styl a hlubší znalosti“.

K předchozímu řešení můžete dodat:

Protože je funkce rostoucí na intervalu $(-\infty, -2)$ a spojitá zleva v bodě $x = -2$, je rostoucí i na intervalu, který bod $x = -2$ zahrnuje. Tedy je f rostoucí na intervalu $(-\infty, -2]$.

Kdy formální středoškolské řešení může vést k chybě:

U této úlohy dělají studenti často následující chybu. Správně spočtou derivaci, správně vyřeší nerovnici a pak napíší nesprávný závěr: f je rostoucí na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Spočítáním funkčních hodnot $f(-3) = 9/19$, $f(3) = -9/7$ se přesvědčíme, že závěr není správný.

Kde jsme udělali chybu? Špatně používáme postačující podmínku, opomíjíme podstatný předpoklad, že množina je interval.