Úlohy z matematické analýzy
na cičení 8. října 2025

1. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu dvou polynomů.

   Vyjádřete podíl P/Q jako součin $P \cdot 1/Q$, použijte vzorec pro derivaci součinu a pro derivaci převrácené hodnoty $(1/Q)'$.

2a Na přednášce jsme odvodili vzorce pro derivaci n-té mocniny a n-té odmocniny pro $n \in \mathbb{N}$. Použijte je spolu se vzorcem pro derivaci složené funkce k odvození vzorce pro derivaci funkce f

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m}$$

2b

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

2c Na základě výsledků předchozích úloh ukažte, že vzorec $(x^q)' = qx^{q-1}$ platí pro všechna $q \in \mathbb{Q}$.

3. Ukažte, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

   Návod: jako na přednášce rozdělte rovinu xy na šest částí tak, abyste mohli odstranit absolutní hodnotu.

4a Vypočtěte limitu posloupnosti

$$a_n = \frac{3n^8 - 1}{(2n^4 + 1)^2}$$

4b

$$a_n = \frac{n + \frac{2-n^2}{n+2}}{n^2 - \frac{n^3-1}{n-1}}$$

4c

$$a_n = \frac{(2n^2 + 1)^3}{(3n^2 + 1)^2}$$

5a Ukažte, že pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$$

   Návod použijte dvakrát trojúhelníkovou nerovnost z úlohy 3.

5b Ukažte, že pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí

$$|a+b+c+d| \leq |a|+|b|+|c|+|d|$$

Návod použijte úlohy 3, 5a.

5c Dokažte, že pro $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ platí

$$|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|$$

Návod: použijte matematickou indukci.

6. Následující úlohu jsme již použili na přednášce při odvozování derivace součinu a na příští přednášce ji použijeme k důkazu věty o limitě součinu.

   Obsah oblasti vyšrafované mezi obdélníky $ABCD$, $AB'C'D'$ vyjádřete pomocí délek $\Delta a = |BB'|$, $\Delta b = |DD'|$, $a = |AB|$, $b = |AD|$.