

Úlohy z matematické analýzy na cvičení 29. října 2025

1. Na množině reálných čísel je definované uspořádání $<$, které má vlastnosti

- (i) Pro každou dvojici reálných čísel x, y platí právě jeden ze vztahů $x = y, x < y, y < x$.
- (ii) Platí-li pro reálná čísla x, y, z vztahy $x < y, y < z$, pak platí i $x < z$.

Ukažte, že pro $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ze vztahů

$$a < b, \quad b < c, \quad c < d, \quad d < e$$

plyne platnost vztahu

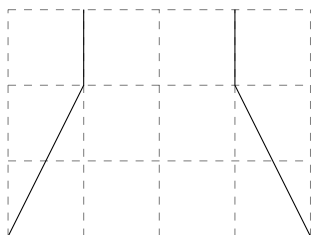
$$a < e$$

2a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce. Napište funkci, která popisuje poloměr hladiny $r(h)$ ve výšce h . Nakreslete graf této funkce.

Zkoumejte spojitost této funkce v bodě $a = 2$.

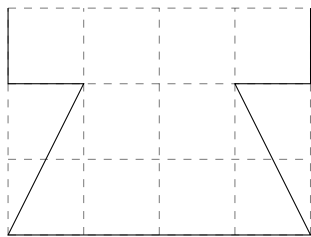
Pokud je funkce v bodě a spojitá, napište definici spojitosti a pro obecně zadané $\varepsilon > 0$ určete $\delta > 0$ vyhovující definici.

Pokud funkce není v bodě a spojitá, napište negaci definice spojitosti a zvolte konkrétní $\varepsilon > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existuje x vyhovující negaci definice. Toto x vyjádřete pomocí δ .



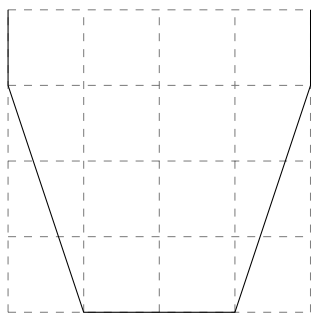
2b

$$a = 2$$



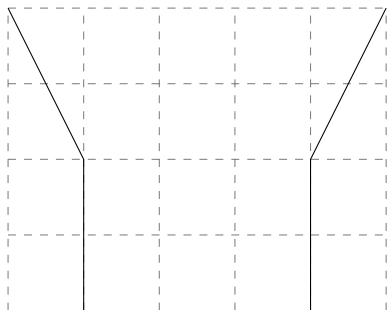
2c

$$a = 3$$



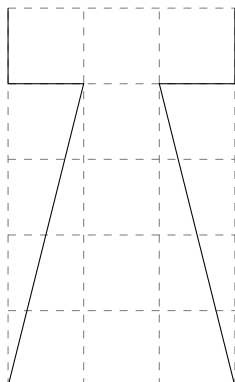
2d

$$a = 2$$



2e

$$a = 4$$



- 3a Určete definiční obor funkce f a vypočtěte její kořeny. Definiční obor rozdělte na intervaly, které neobsahují kořen a napište tyto intervaly.

Na dalším cvičení vaše výpočty použijeme na řešení nerovnice $f(x) > 0$.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 9} - (2x + 1)$$

3b

$$f(x) = \sqrt{4x - 7} - (x - 1)$$

3c

$$f(x) = \sqrt{2x + 7} - (x + 2)$$

4. Pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

5. Pro čísla $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ platí $a_n < b_n$. Ukažte, že platí

$$a_n < \frac{a_n + b_n}{2} < b_n$$