

Úlohy z matematické analýzy na cvičení 12. listopadu 2025

1. (úloha 4 z minulého cvičení)

Pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

2. (úloha 5 z minulého cvičení)

Pro čísla $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ platí $a_n < b_n$. Ukažte, že platí

$$a_n < \frac{a_n + b_n}{2} < b_n$$

3. Dokažte matematickou indukcí, že pro $n \in \mathbb{N}$, $y \geq 0$ platí

$$1 + y \leq (1 + y)^n$$

4. Ukažte, že funkce $f(x) = x^4$ je rostoucí na intervalu $I = [0, \infty)$.

5. Necht' $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$.

Ukažte, že platí

(a) $a \leq x_0 - \delta$

(b) $b \geq x_0 + \delta$

(c) pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ platí $x \in (a, b)$.

6. Necht' $x_0 > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < \sqrt[n]{x_0}$. Načrtněte graf funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ a na číselné ose znázorněte

$$b = (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n, \quad a = (\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n,$$

Z grafu odhadněte, které z čísel $x_0 - a$, $b - x_0$ je větší a svůj odhad podpořte argumenty.

7. Pokud zbyde čas, vraťte se k úlohám 2 z minulého cvičení (nádob a spojitost).