

Úlohy z matematické analýzy na cvičení 19. listopadu 2025

1. Vaším úkolem je kompletně analyzovat monotonii složené funkce. Necht' f, g jsou funkce monotonní na množině $\mathbb{R}$ (nebo na zadaném definičním oboru) a $h(x) = f(g(x))$.
 - (a) **Průzkum na lineárních příkladech:** Zkonstruuje jednoduché lineární funkce pro každou ze čtyř možných kombinací monotonie f a g (Rostoucí/Rostoucí, R/Klesající, K/R, K/K). Sestavte výslednou složenou funkci $h(x)$ a určete její monotonii. Např. pro f rostoucí ($f(x) = x + 1$) a g klesající ($g(x) = -x$).
 - (b) **Ověření hypotézy:** Nyní ověřte svá zjištění z bodu 1 na složitějších příkladech. Zvolte si jednu lineární funkci (jako f nebo g) a jednu kvadratickou funkci na intervalu, kde je ryze monotonní (např. druhou mocninu na $\mathbb{R}_0^+$ nebo na $\mathbb{R}_0^-$). Ověřte, zda výsledek (monotonie h) odpovídá vaší hypotéze z prvního bodu.
 - (c) **Souhrn poznatků:** Na základě svých zjištění z bodů 1 a 2 vytvořte přehlednou tabulku 2x2, která mapuje všechny čtyři možné kombinace monotonie funkcí f a g . Do každé buňky tabulky doplňte finální hypotézu o výsledné monotonii funkce h .
 - (d) **Formulace hypotéz:** Na základě tabulky zformulujte čtyři stručné hypotézy (např. *Hypotéza: Je-li f rostoucí a g klesající, pak je h klesající.*).
 - (e) **Důkaz hypotéz:** Formálně dokažte s využitím definice monotonie celkem **dva** případy, čímž potvrdíte své hypotézy. Uvažujte funkce definované na $\mathbb{R}$.
 - **Povinně:** Dokažte případ, kdy f je **klesající** a g je **klesající**.
 - **Volitelně:** Vyberte si a dokažte **jeden** z následujících dvou případů:
 - i. f je rostoucí a g je klesající.
 - ii. f je klesající a g je rostoucí.

Ujistěte se, že vaše důkazy jsou precizní a srozumitelné a že je z nich jasně patrné, kde přesně dochází k 'obrácení' či 'zachování' nerovnosti.

2. Následující nerovnice řešte s použitím ekvivalentních úprav. Určete obor, na kterém jsou použité úpravy ekvivalentní. Mimo tento obor řešte nerovnici znaménkovou analýzou.

2a

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 9} > 2x + 1$$

2b

$$\sqrt{4x - 7} < x - 1$$

2c

$$\sqrt{2x + 7} \leq x + 2$$

3. Vypočtete limity

3a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x^3 - 1)(x + 1)}$$

3b

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(\sqrt{x+2} - x)}{x^2 - 4}$$

3c

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+2} - 1}$$

4. Načrtněte soustavu souřadnou, v jejím prvním kvadrantu zvolte bod $[x_0, y_0]$ a veďte tímto bodem přímku o směrnici $a > 0$.

Poté vyšrafujte část roviny obsahující body $[x, y]$ splňující nerovnost

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} > a$$