

Úvod do posloupností

Vítejte u studia matematické analýzy. Jedním z prvních a klíčových konceptů, se kterými se setkáte, jsou **posloupnosti**. Představují základ pro pochopení limit, řad a funkcí. Posloupnost si můžete intuitivně představit jako nekonečný, uspořádaný seznam čísel.

1. Definice posloupnosti

Formálně řečeno, **posloupnost reálných čísel** je zobrazení (funkce) z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ je tedy přiřazeno právě jedno reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Toto číslo a_n nazýváme **n-tý člen posloupnosti**.

Posloupnost obvykle značíme jedním z následujících způsobů:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- Jednoduše (a_n)
- Výčtem několika prvních členů: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Příklad: Posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ představuje seznam čísel: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

2. Konvergentní posloupnost

Konvergence je centrálním pojmem analýzy a popisuje chování posloupnosti pro n blížíící se nekonečnu. Intuitivně, posloupnost konverguje, pokud se její členy neomezeně přibližují k nějaké konkrétní hodnotě – **limitě**.

Definice (Limita posloupnosti):

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$.

Zapisujeme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Posloupnost, která má konečnou limitu (tj. $A \in \mathbb{R}$), se nazývá **konvergentní**.

Tato definice říká, že ať si zvolíme jakkoliv úzký pás o šířce 2ε kolem hodnoty A , od určitého indexu n_0 se již všechny následující členy posloupnosti budou nacházet uvnitř tohoto pásu (na přednášce nakreslíme obrázek).

Příklad 1: Ukážeme, že posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní** a její limita je 0:

Nechť $\varepsilon > 0$, zjistíme, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

Po dosazení dostaneme nerovnici

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

která má řešení

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ označíme symbolem $\lceil x \rceil$ zaokrouhlení čísla x na nejbližší celé číslo větší než x . Zvolíme $n_0 := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, pak pro $n > n_0$ platí $n > 1/\varepsilon$, a tedy $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Příklad 2: Ukážeme, že konstantní posloupnost $(a)_{n=1}^\infty$ je **konvergentní** a její limita je a :

Nechť $\varepsilon > 0$, pak $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy zvolit například $n_0 = 1$.

Věta o aritmetice limit

Pro výpočty limit je klíčová následující věta. Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1. **Limita součtu/rozdílu:** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$
2. **Limita součinu:** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. **Limita podílu:** Pokud navíc $B \neq 0$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n \neq 0$, pak platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Tato věta nám umožňuje rozkládat složitější posloupnosti na jednodušší části a počítat jejich limity samostatně.

Důkaz věty odložíme na další přednášku.

Příklad 3: Vypočteme limitu posloupnosti s n -tým členem

$$a_n = \frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2}$$

Po úpravě

$$\frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2} = \frac{n^3(1 - 3/n^2 + 4/n^3)}{n^3(3 - 2/n)} = \frac{1 - 3/n^2 + 4/n^3}{3 - 2/n}$$

použijeme větu o aritmetice limit a výsledky příkladů 1, 2 k výpočtu limity jmenovatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2/n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-2) \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

Podobně spočítáme limitu čitatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3/n^2 + 4/n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3 \cdot 1/n \cdot 1/n + 4 \cdot 1/n \cdot 1/n \cdot 1/n = 1 - 0 + 0$$

a závěrečným použitím věty o limitě podílu dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3/n^2 + 4/n^3}{3 - 2/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3/n^2 + 4/n^3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2/n} = \frac{1}{3}$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2} = \frac{1}{3}$$

3. Omezená posloupnost

Omezenost (někdy též ohraničenost) nám říká, že hodnoty členů posloupnosti nepřekročí určitou mez.

Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že je:

- **Omezená shora**, jestliže existuje takové reálné číslo $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Číslo K se nazývá **horní závora**.
- **Omezená zdola**, jestliže existuje takové reálné číslo $L \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq L$. Číslo L se nazývá **dolní závora**.
- **Omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Příklad: Posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**. Její členy jsou vždy menší nebo rovny 1 (horní závora) a větší než 0 (dolní závora).

Věta o omezenosti konvergentní posloupnosti

Mezi konvergencí a omezeností existuje důležitý vztah, který popisuje následující věta.

Věta: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz:

Nechť (a_n) je konvergentní posloupnost s vlastní limitou $A \in \mathbb{R}$. Podle definice limity, pokud zvolíme například $\varepsilon = 1$, musí existovat takový index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí nerovnost:

$$|a_n - A| < 1$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s dvojitou nerovností:

$$A - 1 < a_n < A + 1$$

Tím jsme ukázali, že všechny členy posloupnosti od indexu $n_0 + 1$ dále jsou omezené. Zbývá nám pouze konečný počet členů na začátku posloupnosti: $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$.

Nyní můžeme definovat dolní a horní závoru pro **celou** posloupnost. Dolní závoru L definujeme jako minimum z první konečné části posloupnosti a hodnoty $A - 1$:

$$L = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A - 1\}$$

Horní závoru K definujeme jako maximum z první konečné části posloupnosti a hodnoty $A + 1$:

$$K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A + 1\}$$

Jelikož se jedná o minimum a maximum z konečného počtu reálných čísel, hodnoty L a K jsou dobře definovaná reálná čísla.

Z naší konstrukce plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $L \leq a_n \leq K$. Posloupnost (a_n) je tedy omezená zdola i shora, a proto je omezená. ■

4. Monotonní posloupnosti

Monotonie popisuje "směr" chování posloupnosti. Říká nám, zda její členy rostou, nebo klesají.

Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že je:

- **Rostoucí**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} > a_n$.
- **Neklesající**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} \geq a_n$.
- **Klesající**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} < a_n$.
- **Nerostoucí**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} \leq a_n$.

Posloupnosti, které splňují kteroukoli z výše uvedených podmínek, nazýváme **monotonní**. Pokud platí ostrá nerovnost ($>$ nebo $<$), mluvíme o **ryze monotonních** posloupnostech.

Příklad: Posloupnost $(n^2)_{n=1}^\infty = (1, 4, 9, \dots)$ je **rostoucí**. Posloupnost $(-\frac{1}{n})_{n=1}^\infty = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots)$ je také **rostoucí**. Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^\infty = (-1, 1, -1, \dots)$ **není monotonní**.