

Spojitosť funkce

Studijní materiál pro studenty učitelství matematiky

Pojem spojitosti je jednou z klíčových myšlenek matematické analýzy. Intuitivně si spojitou funkci představujeme jako funkci, jejíž graf můžeme nakreslit jedním tahem, aniž bychom zvedli tužku z papíru. Nyní si tuto intuitivní představu zformulujeme matematicky přesně.

1 Definice spojitosti a příklady

1.1 Spojitosť funkce v bodě

Definice 1.1. Nechť f je funkce a x_0 je vnitřním bodem jejího definičního oboru $D(f)$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** x_0 , jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Tato definice, známá jako **epsilon-delta definice spojitosti**, říká, že pro jakkoli malé kladné ε (tedy pro jakkoli úzký pás okolo hodnoty $f(x_0)$) jsme schopni najít takové kladné δ (tedy dostatečně malé okolí bodu x_0), že pro všechny body x z tohoto δ -okolí leží jejich funkční hodnoty $f(x)$ v zadaném ε -pásu.

Poznámka 1.1. Klíčovou součástí definice je, že funkce f musí být definována na **celém okolí** bodu x_0 , tedy na nějakém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Z tohoto důvodu například nemá smysl hovořit o spojitosti funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 0$ podle výše uvedené definice. Definiční obor této funkce je $[0, \infty)$, takže pro jakékoliv $\delta > 0$ okolí $(-\delta, \delta)$ bodu 0 obsahuje záporná čísla, ve kterých funkce není definována. Tento problém řešíme zavedením jednostranné spojitosti.

1.2 Jednostranná spojitost a spojitost na intervalu

Definice 1.2 (Spojitost zprava a zleva). • Řekneme, že funkce f je **spojitá zprava** v bodě x_0 , jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Řekneme, že funkce f je **spojitá zleva** v bodě x_0 , jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0] : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

S těmito definicemi již můžeme korektně říci, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je v bodě $x_0 = 0$ spojitá zprava.

Definice 1.3 (Spojitost na intervalu). • Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** (a, b) , je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

- Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a, b]$, je-li spojitá na (a, b) , v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

1.3 Příklady spojitých funkcí

Ukážeme si, že dvě nejzákladnější funkce – konstantní a identická – jsou spojité na celé množině reálných čísel.

Příklad 1.1. Konstantní funkce $f(x) = c$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme $\delta > 0$ tak, aby z podmínky $|x - x_0| < \delta$ plynulo $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pro naši funkci platí:

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0$$

Jelikož $0 < \varepsilon$ pro libovolné kladné ε , nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ je splněna vždy, bez ohledu na volbu x . Můžeme tedy zvolit libovolné $\delta > 0$, například $\delta = 1$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Příklad 1.2. Identická funkce $f(x) = x$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Zvolme libovolný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Chceme najít $\delta > 0$ takové, že pokud $|x - x_0| < \delta$, pak $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. V tomto případě je podmínka, kterou chceme splnit:

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

Vidíme, že stačí zvolit $\delta = \varepsilon$. Pak totiž platí: pokud $|x - x_0| < \delta$ (což je totéž jako $|x - x_0| < \varepsilon$), pak je požadovaná nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ splněna. Jelikož jsme našli vhodné δ pro každé ε , je funkce spojitá v bodě x_0 . Protože x_0 bylo libovolné, je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$. $\square$

2 Věty o spojitých funkcích

2.1 Heineho věta

Heineho věta dává do souvislosti spojitost definovanou pomocí $\varepsilon - \delta$ kritéria se spojitostí definovanou pomocí limit posloupností. Je to velmi mocný nástroj pro dokazování (ne)spojitosti.

Věta 2.1 (Heine). *Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastností $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Důkaz. Důkaz se skládá ze dvou implikací.

1. Implikace " $\implies$ ": (Předpokládáme spojitost, dokazujeme limitu posloupnosti)

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 . Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Chceme ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože f je spojitá v x_0 , existuje k tomuto ε takové $\delta > 0$, že pro všechna x splňující $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, k námi nalezenému $\delta > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n > n_0$ platí $|x_n - x_0| < \delta$. Spojením těchto dvou faktů dostáváme: pro $n > n_0$ platí $|x_n - x_0| < \delta$, a to implikuje $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. To je ale přesně definice toho, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

2. Implikace " $\impliedby$ ": (Dokazujeme sporem)

Předpokládejme, že pro každou posloupnost $x_n \rightarrow x_0$ platí $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Chceme ukázat,

že f je spojitá v x_0 . Postupujeme sporem. Předpokládejme, že f **není** spojitá v x_0 . To znamená, že negace definice spojitosti je pravdivá:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D(f) : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

Máme tedy nějaké pevné $\varepsilon_0 > 0$. Nyní můžeme postupně volit různá δ . Zvolme posloupnost $\delta_n = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro každé δ_n nám negovaná definice zaručuje existenci bodu x_n takového, že:

1. $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$
2. $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$

Z první podmínky plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Podle našeho předpokladu by tedy mělo platit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. To by ale znamenalo, že od určitého indexu n musí být $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon_0$. To je ale v přímém sporu s druhou podmínkou, která říká, že tato nerovnost neplatí pro žádné n . Naš předpoklad, že funkce není spojitá, nás dovedl ke sporu. Musí tedy být spojitá. $\square$

2.2 Spojitost a aritmetické operace

Heineho věta je mimořádně užitečná pro dokazování dalších vlastností spojitých funkcí, například jak se spojitost chová vůči základním aritmetickým operacím. Důkazy jsou přímým důsledkem věty o limitách posloupností.

Věta 2.2 (Spojitost a aritmetické operace). *Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak jsou v bodě x_0 spojité i funkce:*

1. $f + g$ (součet)
2. $f - g$ (rozdíl)
3. $f \cdot g$ (součin)

Pokud navíc platí $g(x_0) \neq 0$, pak je v bodě x_0 spojitá i funkce:

4. $\frac{f}{g}$ (podíl)

Důkaz. Důkaz provedeme s využitím Heineho věty a Věty o limitách posloupností a aritmetických operacích.

Předpokládáme, že f a g jsou spojité v x_0 . Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Z Heineho věty (implikace " $\implies$ ") pak víme, že platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$$

Nyní stačí ověřit závěry pro jednotlivé operace a použít Heineho větu (implikaci " $\impliedby$ ").

1. Součet: Chceme dokázat, že funkce $f + g$ je spojitá v x_0 . Musíme ověřit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = (f + g)(x_0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \\ &= (f + g)(x_0) \end{aligned}$$

Krok (*) platí na základě věty o limitě součtu posloupností. Jelikož posloupnost $\{x_n\}$ byla libovolná, z Heineho věty plyne, že $f + g$ je spojitá v x_0 .

3. Součin: Postupujeme analogicky pro $f \cdot g$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) \\ &\stackrel{(**)}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \right) \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) \\ &= (f \cdot g)(x_0)\end{aligned}$$

Krok (**) platí na základě věty o limitě součinu posloupností. Z Heineho věty plyne spojitost $f \cdot g$.

4. Podíl: Předpokládáme navíc $g(x_0) \neq 0$. Protože $\lim g(x_n) = g(x_0)$, z věty o limitě podílu posloupností víme, že limita podílu existuje.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \\ &\stackrel{(***)}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} \\ &= \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\ &= \left(\frac{f}{g} \right)(x_0)\end{aligned}$$

Krok (***) platí na základě věty o limitě podílu posloupností (jelikož $\lim g(x_n) = g(x_0) \neq 0$). Z Heineho věty plyne spojitost $\frac{f}{g}$.

(Důkaz pro rozdíl $f - g$ je zcela analogický důkazu pro součet.) □

2.3 Věta o kořeni spojitě funkce (Bolzanova věta)

Tato věta je jedním z nejdůležitějších důsledků spojitosti a zaručuje existenci řešení rovnic. Říká, že pokud spojitá funkce na intervalu změní znaménko, musí někde protnout osu x .

Věta 2.3 (Bolzano). *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ (tj. funkční hodnoty v krajních bodech mají opačná znaménka). Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.*

Důkaz (Metoda půlení intervalů). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. Budeme konstruovat posloupnost vnořených intervalů $[a_n, b_n]$, které všechny obsahují hledaný kořen.

1. Položme $a_0 = a$, $b_0 = b$.
2. V n -tém kroku (pro $n \geq 1$) vezmeme střed intervalu $[a_{n-1}, b_{n-1}]$:

$$s_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

3. Nastávají tři možnosti:

- Pokud $f(s_n) = 0$, našli jsme kořen $c = s_n$ a důkaz je hotov.

- Pokud $f(s_n) > 0$, kořen musí ležet v intervalu $[a_{n-1}, s_n]$. Položíme tedy $a_n = a_{n-1}$ a $b_n = s_n$.
- Pokud $f(s_n) < 0$, kořen musí ležet v intervalu $[s_n, b_{n-1}]$. Položíme tedy $a_n = s_n$ a $b_n = b_{n-1}$.

Tímto postupem získáme posloupnost vnořených uzavřených intervalů $[a_n, b_n]$ takových, že $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ a pro každé n platí $f(a_n) \leq 0$ a $f(b_n) \geq 0$.

Délka intervalu $[a_n, b_n]$ je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Jak $n \rightarrow \infty$, délka intervalů se blíží k nule. Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající a shora omezená (např. číslem b), takže má limitu. Posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí a zdola omezená (např. číslem a), takže má také limitu. Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, obě posloupnosti mají stejnou limitu. Označme ji c .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Jelikož funkce f je spojitá na $[a, b]$, je spojitá i v bodě c . Z Heineho věty tedy plyne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = f(c)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = f(c)$$

Zároveň ale víme, že pro všechna n je $f(a_n) \leq 0$, z čehož plyne (z věty o limitě a uspořádání), že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$, tedy $f(c) \leq 0$. Podobně víme, že $f(b_n) \geq 0$, z čehož plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$, tedy $f(c) \geq 0$.

Jediná hodnota, která splňuje $f(c) \leq 0$ a zároveň $f(c) \geq 0$, je $f(c) = 0$. Tím je existence kořene c dokázána. Navíc, protože $f(a)$ a $f(b)$ jsou nenulové, musí být c různé od a i b , tedy $c \in (a, b)$. $\square$

Důsledek 2.4. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu I (libovolného typu) a nechť $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$. Pak platí právě jedna z následujících možností:*

1. $f(x) > 0$ pro všechna $x \in I$ (funkce je na intervalu I kladná).
2. $f(x) < 0$ pro všechna $x \in I$ (funkce je na intervalu I záporná).

Důkaz (Sporem). Předpokládejme pro spor, že tvrzení neplatí. To by znamenalo, že funkce f nabývá na intervalu I jak kladných, tak záporných hodnot. Tedy existují body $a, b \in I$ takové, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a < b$. Interval $[a, b]$ je podmnožinou intervalu I (neboť I je interval). Funkce f je spojitá na I , je tedy spojitá i na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

Na intervalu $[a, b]$ nyní máme spojitou funkci f , pro kterou platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Podle Bolzanovy věty (Věta 2.3) musí existovat bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Protože $c \in (a, b)$ a $[a, b] \subset I$, je také $c \in I$. Nalezli jsme tedy bod $c \in I$, ve kterém je $f(c) = 0$. To je ale ve sporu s naším základním předpokladem, že $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$.

Náš původní předpoklad, že funkce f nabývá na I kladných i záporných hodnot, byl tedy chybný. Proto musí být funkce f na celém intervalu I buď pouze kladná, nebo pouze záporná. $\square$

2.4 Aplikace důsledku: Řešení nerovnic

Důsledek 2.4 je teoretickým základem pro tzv. **metodu nulových bodů**, kterou používáme k řešení nerovnic.

Příklad 2.1. Vyřešte nerovnici $\sqrt{x^2 + 5} > 1 - 2x$ v oboru $\mathbb{R}$.

Řešení (Metodou nulových bodů). Převedeme nerovnici na jednu stranu, abychom porovnávali s nulou:

$$\sqrt{x^2 + 5} - (1 - 2x) > 0$$

Definujme funkci $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + 2x - 1$. Hledáme intervaly, kde $f(x) > 0$.

1. Definiční obor a spojitost Podmínka pro odmocninu $x^2 + 5 \geq 0$ je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, protože $x^2 \geq 0$. Definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$. Funkce $f(x)$ je součtem a složením spojitých funkcí (polynomy $x^2 + 5$ a $2x - 1$, a funkce $\sqrt{u}$), je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}$.

2. Nalezení nulových bodů Hledáme body $x \in D(f)$, kde $f(x) = 0$:

$$\sqrt{x^2 + 5} + 2x - 1 = 0$$

$$\sqrt{x^2 + 5} = 1 - 2x$$

Toto je iracionální rovnice. Pro její řešení musíme nejprve zajistit, aby byla pravá strana nezáporná (protože levá strana je z definice nezáporná): Podmínka: $1 - 2x \geq 0 \implies 1 \geq 2x \implies x \leq \frac{1}{2}$.

Za této podmínky můžeme obě strany umocnit:

$$(\sqrt{x^2 + 5})^2 = (1 - 2x)^2$$

$$x^2 + 5 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$0 = 3x^2 - 4x - 4$$

Kořeny této kvadratické rovnice najdeme pomocí diskriminantu $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 16 + 48 = 64$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

Získáme dva kandidáty na kořeny:

$$x_1 = \frac{4 + 8}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{4 - 8}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Nyní musíme ověřit, zda tyto kořeny splňují naši podmínku $x \leq \frac{1}{2}$:

- $x_1 = 2$: Nesplňuje podmínku ($2 \not\leq \frac{1}{2}$). Jedná se o falešný kořen získaný neekvivalentní úpravou (umocněním).
- $x_2 = -\frac{2}{3}$: Splňuje podmínku ($-\frac{2}{3} \leq \frac{1}{2}$). Toto je jediný nulový bod funkce $f(x)$.

3. Aplikace důsledku Spojitá funkce $f(x)$ má na $\mathbb{R}$ jediný nulový bod $x_0 = -\frac{2}{3}$. Tento bod rozděluje $\mathbb{R}$ na dva intervaly:

$$I_1 = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{a} \quad I_2 = \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Podle Důsledku 2.4 musí být funkce $f(x)$ na každém z těchto intervalů buď ryze kladná, nebo ryze záporná. Stačí tedy otestovat znaménko v jednom libovolném bodě z každého intervalu.

4. Testování intervalů

- **Interval** $I_1 = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$: Zvolme testovací bod $x = -1$.

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 5} + 2(-1) - 1 = \sqrt{1+5} - 2 - 1 = \sqrt{6} - 3$$

Jelikož $6 < 9$, je $\sqrt{6} < 3$, a proto $f(-1) < 0$. Funkce f je na I_1 záporná.

- **Interval** $I_2 = \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$: Zvolme testovací bod $x = 0$.

$$f(0) = \sqrt{0^2 + 5} + 2(0) - 1 = \sqrt{5} - 1$$

Jelikož $5 > 1$, je $\sqrt{5} > 1$, a proto $f(0) > 0$. Funkce f je na I_2 kladná.

5. Závěr Hledali jsme řešení nerovnice $f(x) > 0$. Tomu odpovídá interval I_2 . Množinou řešení nerovnice je $K = \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. □

2.5 Věta o nabývání mezihodnot

Věta 2.5 (O nabývání mezihodnot). *Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Nechť y_0 je libovolná hodnota ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ (tj. $f(a) < y_0 < f(b)$ nebo $f(b) < y_0 < f(a)$). Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = y_0$.*

Důkaz. Důkaz je přímou aplikací Bolzanovy věty.

Bez újmy na obecnosti (BÚNO) předpokládejme, že $f(a) < y_0 < f(b)$. (Případ $f(b) < y_0 < f(a)$ by se dokazoval analogicky.)

Definujme novou pomocnou funkci $g(x)$ na intervalu $[a, b]$ jako:

$$g(x) = f(x) - y_0$$

Funkce $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$ (z předpokladů). Funkce $h(x) = -y_0$ je konstantní, a tedy také spojitá na $[a, b]$. Podle věty o spojitosti součtu (resp. rozdílu) je funkce $g(x) = f(x) + h(x)$ spojitá na $[a, b]$.

Nyní vypočteme hodnoty funkce $g(x)$ v krajních bodech intervalu:

- $g(a) = f(a) - y_0$. Protože $f(a) < y_0$, je $g(a) < 0$.
- $g(b) = f(b) - y_0$. Protože $y_0 < f(b)$, je $g(b) > 0$.

Platí tedy $g(a) \cdot g(b) < 0$.

Funkce $g(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a v krajních bodech má opačná znaménka. Můžeme na ni aplikovat Bolzanovu větu (Věta 2.3). Z této věty plyne, že existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že $g(c) = 0$.

Dosazením zpět do definice $g(x)$ dostáváme:

$$f(c) - y_0 = 0$$

což znamená $f(c) = y_0$. Tím je věta dokázána. □

2.6 Obraz intervalu ve spojité monotónní funkci

Kombinace spojitosti a monotonie má velmi silný důsledek pro zobrazování intervalů. Zatímco Věta o nabývání mezihodnot říká, že obrazem intervalu je *nějaký* interval, přidání monotonie nám umožňuje přesně určit jaký.

Věta 2.6. *Nechť f je funkce spojitá a ryze monotónní na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak obrazem $f([a, b])$ je rovněž uzavřený interval. Konkrétně:*

- *Je-li f rostoucí na $[a, b]$, pak $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.*
- *Je-li f klesající na $[a, b]$, pak $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.*

Důkaz. Dokážeme případ pro rostoucí funkci. Důkaz pro klesající funkci je analogický. Chceme dokázat rovnost dvou množin, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, což vyžaduje dva kroky (dvě inkluze).

1. Inkluze $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$: Zvolme libovolné $y \in f([a, b])$. Z definice obrazu množiny to znamená, že existuje $x \in [a, b]$ takové, že $f(x) = y$. Protože $x \in [a, b]$, platí $a \leq x \leq b$. Jelikož f je na tomto intervalu rostoucí, platí $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Dosazením $y = f(x)$ dostáváme $f(a) \leq y \leq f(b)$. To ale znamená, že $y \in [f(a), f(b)]$. Tato část důkazu využívá **monotonii**.

2. Inkluze $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$: Zvolme libovolné $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Chceme ukázat, že y_0 je obrazem nějakého $x \in [a, b]$. Pokud $y_0 = f(a)$, pak $x = a$ a jsme hotovi. Pokud $y_0 = f(b)$, pak $x = b$ a jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že $f(a) < y_0 < f(b)$. Protože f je spojitá na $[a, b]$ a y_0 je hodnota ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$, můžeme použít Větu o nabývání mezihodnot (Věta 2.5). Z ní plyne, že existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = y_0$. V každém případě jsme našli $x \in [a, b]$ (buď a , b , nebo c), pro které $f(x) = y_0$. To znamená, že $y_0 \in f([a, b])$. Tato část důkazu využívá **spojitost** (skrze Větu o nabývání mezihodnot).

Protože jsme dokázali obě inkluze, platí $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. □

2.7 Aplikace: Existence n -té odmocniny

Jednou z fundamentálních aplikací věty o obrazu spojitého intervalu (konkrétně Věty 2.5 nebo jejího zpřesnění pro monotónní funkce 2.6) je důkaz existence n -tých odmocnin z nezáporných čísel.

Věta 2.7 (Monotonie n -té mocniny). *Nechť $n \in \mathbb{N}$ (přirozené číslo). Funkce $f(x) = x^n$ je **ryze rostoucí** na intervalu $[0, \infty)$.*

Důkaz. Chceme dokázat, že pro libovolná $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$, tedy $x_1^n < x_2^n$.

Rovnost $x_2^n - x_1^n$ můžeme faktorizovat pomocí vzorce pro rozdíl n -tých mocnin:

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

Označme $A = (x_2 - x_1)$ a $B = (x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$.

Analýzujeme znaménka obou činitelů A a B :

1. **Činitel $A = (x_2 - x_1)$:** Z předpokladu $x_1 < x_2$ plyne, že $x_2 - x_1 > 0$. Tento činitel je tedy kladný.

2. **Činitel** $B = \sum_{k=0}^{n-1} x_2^{n-1-k} x_1^k$: Toto je součet n členů. Z předpokladů víme, že $x_1 \geq 0$ a $x_2 > x_1 \geq 0$, takže $x_2 > 0$. Všechny sčítance $x_2^{n-1-k} x_1^k$ jsou proto nezáporné (součin nezáporných čísel).

První člen součtu (pro $k = 0$) je x_2^{n-1} . Jelikož $x_2 > 0$, je $x_2^{n-1} > 0$ (za předpokladu $n \geq 1$). (Jediný případ, kdy by mohl být součet B nulový, by byl, kdyby $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$, ale to je ve sporu s $x_1 < x_2$.)

Protože B je součet nezáporných členů, z nichž alespoň jeden (x_2^{n-1}) je ryze kladný, je celý součet B ryze kladný ($B > 0$).

Celkově dostáváme, že $x_2^n - x_1^n = A \cdot B$, kde $A > 0$ a $B > 0$. Z toho plyne $x_2^n - x_1^n > 0$, což znamená $x_2^n > x_1^n$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 2.8 (Existence n -té odmocniny). *Pro každé reálné číslo $y_0 \geq 0$ a každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno reálné číslo $x \geq 0$ takové, že $x^n = y_0$. (Toto číslo x značíme jako $\sqrt[n]{y_0}$.)*

Důkaz. Pokud $y_0 = 0$, pak zjevně $x = 0$ je jediným řešením, neboť $0^n = 0$ (pro $n \geq 1$). Předpokládejme tedy, že $y_0 > 0$.

Definujme funkci $f(x) = x^n$ na definičním oboru $D(f) = [0, \infty)$. Tato funkce má dvě klíčové vlastnosti:

1. **Je spojitá:** Funkce $g(x) = x$ je spojitá na $\mathbb{R}$ (viz Příklad 2.2). Funkce $f(x) = x^n = x \cdot x \cdots x$ je tedy spojitá jakožto konečný součin spojitých funkcí (podle Věty 2.3). Tím pádem je spojitá i na intervalu $[0, \infty)$.
2. **Je ryze rostoucí:** Pro libovolné $0 \leq x_1 < x_2$ platí $x_1^n < x_2^n$. Funkce f je tedy na $[0, \infty)$ ryze monotónní (rostoucí).

Naším cílem je ukázat, že hodnota y_0 leží v oboru hodnot $f([0, \infty))$.

Vezměme bod $a = 0$. Platí $f(0) = 0^n = 0$. Nyní potřebujeme najít bod $b > 0$ takový, aby $f(b) \geq y_0$. Zvolme $b = 1 + y_0$. Protože $y_0 > 0$, je $b > 1$. Spočtěme $f(b) = b^n = (1 + y_0)^n$. Jelikož $b > 1$ a $n \geq 1$, platí $b^n \geq b$. Tedy $f(b) \geq b = 1 + y_0 > y_0$.

Nyní aplikujeme Větu 3.2 (o obrazu spojitě monotónní funkce 2.6) na interval $[a, b] = [0, 1 + y_0]$. Funkce $f(x) = x^n$ je na tomto intervalu **spojitá** a **ryze rostoucí**. Obrazem tohoto intervalu je tedy interval $f([0, 1 + y_0]) = [f(0), f(1 + y_0)]$ (2.6). Platí $f([0, 1 + y_0]) = [0, (1 + y_0)^n]$.

Víme, že $f(0) = 0 < y_0$ a $f(b) = (1 + y_0)^n > y_0$. Hodnota y_0 tedy prokazatelně leží v obrazovém intervalu $[0, (1 + y_0)^n]$.

Protože $y_0 \in f([0, 1 + y_0])$, musí (z definice obrazu) existovat nějaké $x \in [0, 1 + y_0]$ takové, že $f(x) = y_0$. Tím je dokázána **existence** řešení $x^n = y_0$.

Jednoznačnost plyne přímo z faktu, že funkce $f(x) = x^n$ je na intervalu $[0, \infty)$ ryze rostoucí. Pokud by existovala dvě různá řešení $x_1 \neq x_2$ (obě ≥ 0), pak by BÚNO $x_1 < x_2$, z čehož by plynulo $f(x_1) < f(x_2)$, tedy $y_0 < y_0$, což je spor. $\square$