Posloupnosti a jejich limity

Učební text pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková ve spolupráci s LLM Gemini, model 3.6 thinking

29. října 2026

Abstrakt

Tento učební text je určen studentům učitelství matematiky. Cílem textu je propojovat přísnou matematickou korektnost vyžadovanou na vysokoškolské úrovni s didaktickým nadhledem, logikou důkazových postupů a rozborem typických studentských a žákovských miskoncepcí.

Obsah

1 Základní definice: posloupnost a monotonie **2**

2 Konvergentní posloupnosti a limita **3**

3 Limity a aritmetické operace **4**

4 Limity a nerovnosti **6**

5 Axiom suprema reálných čísel **7**

6 Omezenost posloupností a vybrané posloupnosti **8**

7 Konvergence monotónních posloupností **9**

8 Úplnost reálných čísel **10**

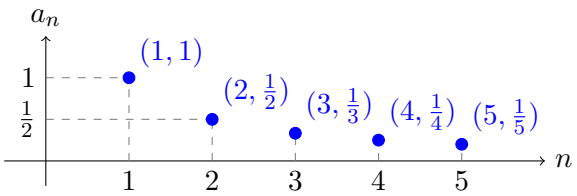
9 Didaktický nadhled, miskoncepce a historie **11**

1 Základní definice: posloupnost a monotonie

Definice 1.1 (Posloupnost)**.** Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel a $\mathbb{N}$ množinu přirozených čísel. *Posloupností reálných čísel* (nebo krátce posloupností) rozumíme každé zobrazení $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Funkční hodnotu zobrazení a v bodě $n \in \mathbb{N}$ značíme a_n a nazýváme ji n-tým členem posloupnosti. Celou posloupnost zapisujeme značkami $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo zkráceně $\{a_n\}$.

Poznámka 1.2. Zkrácený zápis $\{a_n\}$ používáme v případech, kdy je index n zřejmý z kontextu. Rovněž je třeba poznamenat, že posloupnost nemusí vždy začínat prvním členem s indexem $n = 1$, ale může být definována pro indexy $n \geq n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{Z}$. Při vyšetřování vlastností chování posloupnosti „v nekonečnu“ (např. u limity) nezáleží na tom, kterým konečným členem posloupnost začíná.

Prvním krokem k vizualizaci vlastností posloupnosti je její grafické znázornění v rovinné souřadnicové soustavě. Jelikož je definičním oborem množina $\mathbb{N}$, grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $[n, a_n] \in \mathbb{R}^2$.



Obrázek 1: Graf posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$.

Definice 1.3 (Monotonie posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je:

- *rostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$;
- *klesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$;
- *neklesající*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$;
- *nerostoucí*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Posloupnosti rostoucí a klesající nazýváme souhrnně *ostře monotónní*. Všechny čtyři typy posloupností nazýváme *monotónní*.

Příklad 1.4. Uvažujme posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{n}{n+1}$.

1. U posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$ srovnáme členy a_n a a_{n+1}:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

   Proto $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající (a tedy ostře monotónní).

2. U posloupnosti $b_n = \frac{n}{n+1}$ odvodíme monotonii analýzou znaménka výrazu $b_{n+1} - b_n$:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}.$$

   Převedením na společný jmenovatel dostáváme:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{(n^2+2n+1) - (n^2+2n)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

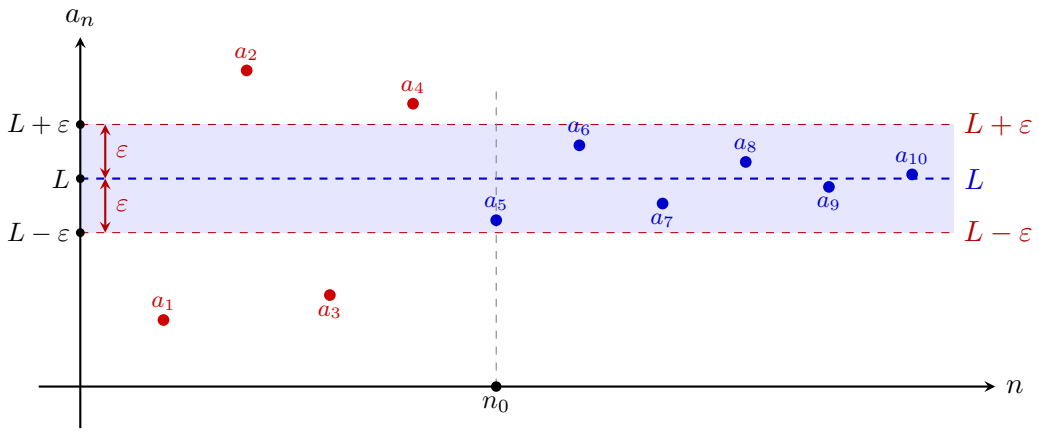
   Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n+1 > 0$ a $n+2 > 0$, je čitatel i jmenovatel kladný, a tedy $b_{n+1} - b_n > 0$, což implikuje $b_{n+1} > b_n$. Posloupnost $\{b_n\}$ je tedy rostoucí.

2 Konvergentní posloupnosti a limita

Definice 2.1 (Limita posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* $a \in \mathbb{R}$ (nebo že *konverguje* k a), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{nebo zkráceně} \quad \lim a_n = a, \quad \text{případně} \quad a_n \to a.$$

Pokud posloupnost má reálnou limitu, říkáme, že je *konvergentní*. V opačném případě říkáme, že je *divergentní*.



Obrázek 2: Definice limity posloupnosti: od indexu n_0 leží všechny členy a_n v ε-pásu kolem limity L.

Poznámka 2.2. V běžném matematickém zápisu zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n$. U posloupností se však symbol $n \to \infty$ často vynechává a píše se pouze $\lim a_n$, protože index n je přirozené číslo a u posloupnosti se nemůže blížit k jinému bodu než k $+\infty$.

Příklad 2.3. Formálně dokážeme z definice následující limity:

1. Důkaz, že $\lim \frac{1}{n} = 0$: Budiž dány libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, aby pro všechna $n \geq n_0$ platilo $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Nerovnost $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ je ekvivalentní s $\frac{1}{n} < \varepsilon$, což je splněno, pokud $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Podle Archimedeovy vlastnosti reálných čísel existuje přirozené číslo $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pro všechna $n \geq n_0$ pak platí $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tím je limita dokázána.

2. Důkaz, že pro konstantní posloupnost $a_n = c$ (kde $c \in \mathbb{R}$) platí $\lim c = c$: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ zvolíme $n_0 = 1$. Pak pro všechna $n \geq 1$ platí $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Věta 2.4 (O jednoznačnosti limity)**.** *Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu.*

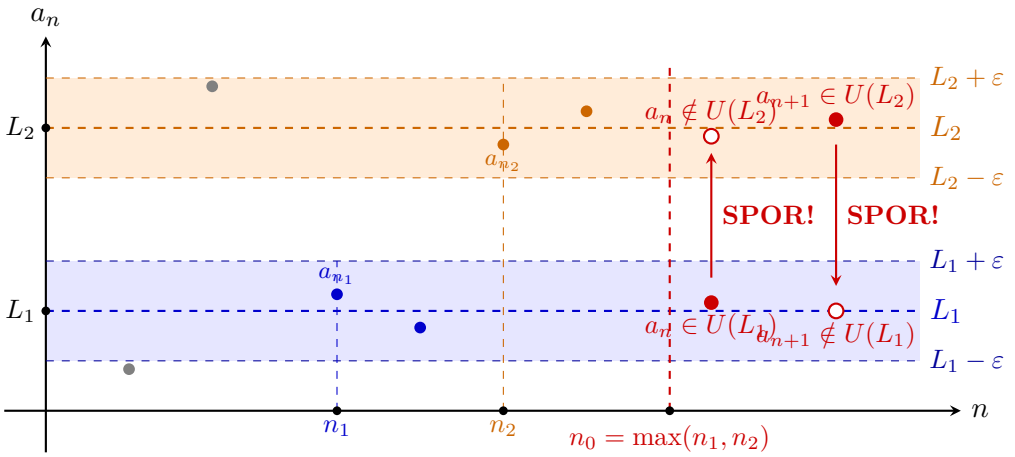
Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}$ má dvě různé limity $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, přičemž $L_1 \neq L_2$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $L_1 < L_2$. Položme $\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{2} > 0$.

Z definice limity pro číslo L_1 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_1$ platí $|a_n - L_1| < \varepsilon$. Z definice limity pro číslo L_2 existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_2$ platí $|a_n - L_2| < \varepsilon$.

Zvolme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro všechna $n \geq n_0$ musí platit obě nerovnosti současně. Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme:

$$L_2 - L_1 = |L_2 - L_1| = |(L_2 - a_n) + (a_n - L_1)| \leq |L_2 - a_n| + |a_n - L_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = L_2 - L_1.$$

Dostáváme tedy ostrou nerovnost $L_2 - L_1 < L_2 - L_1$, což je spor. Předpoklad o existenci dvou různých limit byl chybný, tudíž limita je určena jednoznačně. □



Obrázek 3: Důkaz jednoznačnosti limity sporem: Pro dvě různé limity $L_1 \neq L_2$ existují disjunktní ε-okolí. Od indexu $n_0 = \max(n_1, n_2)$ by však členy a_n musely ležet v obou pásech současně, což není možné.

Didaktická poznámka 2.5. Důkaz sporem je jedním z nejvýznamnějších důkazových principů v matematické analýze. V didaktice matematiky je klíčové studentům zdůraznit logickou strukturu: chci-li dokázat tvrzení P, předpokládám jeho negaci $\neg P$ a odvozuji z ní logickým řetězcem kroků tvrzení Q a zároveň $\neg Q$ (spor). V tomto konkrétním případě teprve Věta o jednoznačnosti limity zakládá korektnost samotného symbolického zápisu $\lim a_n = a$. Pokud by limita nebyla jednoznačná, výraz $\lim a_n$ by představoval množinu či nejednoznačný předpis, a nemohli bychom mezi symbol $\lim a_n$ a konkrétní číslo a klást znak rovnosti.

3 Limity a aritmetické operace

Věta 3.1 (O limitě součtu a násobku)**.** *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a platí $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim(c \cdot a_n) = c \cdot a$.

Důkaz. 1. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož $a_n \to a$ a $b_n \to b$, k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existují indexy $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$\forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{a} \quad \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pro libovolné $n \geq n_0$ s využitím trojúhelníkové nerovnosti platí:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Pro $c = 0$ je tvrzení zřejmé. Pro $c \neq 0$ zvolíme k $\varepsilon > 0$ index n_0 tak, aby pro $n \geq n_0$ platilo $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Pak pro $n \geq n_0$ máme $|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. □

Poznámka 3.2 (O posloupnostech jako vektorech)**.** Předchozí věta má hluboký algebraicko-topologický význam. Množina všech konvergentních posloupností tvoří s operacemi sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\lim\colon \{a_n\} \mapsto \lim a_n$, které každé konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, je podle této věty lineárním zobrazením (funkcionálem) z tohoto vektorového prostoru do $\mathbb{R}$.

Věta 3.3 (O limitě součinu)**.** *Nechť $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$. Pak platí $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*

Důkaz. V tomto důkazu využijeme algebraickou identitu pro odhad rozdílu součinů:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

V předchozím textu byla odvozena užitečná implikace: pro $\varepsilon_1 > 0$ z nerovností $|A - a| < \varepsilon_1$ a $|B - b| < \varepsilon_1$ plyne nerovnost $|AB - ab| < \varepsilon_1(|a| + |b| + \varepsilon_1)$.

Zvoleme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože výraz $K = |a| + |b| + 1$ je kladný, zvolme $\varepsilon_1 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{K}\right\}$. K tomuto $\varepsilon_1 > 0$ existují $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ platí $|a_n - a| < \varepsilon_1$ a pro $n \geq n_2$ platí $|b_n - b| < \varepsilon_1$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ pak platí:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon_1(|a| + |b| + \varepsilon_1) \leq \varepsilon_1(|a| + |b| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}(|a| + |b| + 1) = \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Věta 3.4 (O limitě převrácené hodnoty)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$ *a* $a \neq 0$*, přičemž* $a_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*. Pak* $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$*.*

Důkaz. Využijeme opačnou trojúhelníkovou nerovnost $||A| - |a|| \leq |A - a|$. Jelikož $a \neq 0$, platí $|a| > 0$. Položme $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$. K tomuto ε_0 existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$. Z opačné trojúhelníkové nerovnosti dostáváme:

$$|a| - |a_n| \leq ||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \implies |a_n| > \frac{|a|}{2} \implies \frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{|a|}.$$

Nyní uvažujme libovolné $\varepsilon > 0$. K číslu $\varepsilon' = \frac{|a|^2\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ je $|a_n - a| < \varepsilon'$. Pro $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ upravíme rozdíl převrácených hodnot:

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n||a|} < \frac{2}{|a|^2}|a_n - a| < \frac{2}{|a|^2} \cdot \frac{|a|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Věta 3.5 (O limitě rozdílu a podílu)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$ *a* $\lim b_n = b$*. Pak:*

1. $\lim(a_n - b_n) = a - b$*,*
2. *Je-li* $b \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*, platí* $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme snadným převodem na součet a součin: 1. Rozdíl zapíšeme jako $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$. Podle věty o limitě násobku a součtu je $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n + \lim((-1)b_n) = a + (-1)b = a - b$. 2. Podíl zapíšeme jako $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$. Podle věty o převrácené hodnotě je $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ a podle věty o limitě součinu dostáváme $\lim \frac{a_n}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. □

Poznámka 3.6. Předchozí věty o limitě součtu, násobku, rozdílu, součinu a podílu souhrnně nazýváme *Větou o aritmetice limit.*

Příklad 3.7. Vypočteme limitu posloupnosti $L = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n - 6}{2n^2 + 4}$ a podrobně vysvětlíme použití věty o aritmetice limit. Čitatele i jmenovatele vytknutím rozepíšeme:

$$\frac{3n^2 - 5n - 6}{2n^2 + 4} = \frac{n^2\left(3 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}}{2 + \frac{4}{n^2}}.$$

Nyní postupně zdůvodníme jednotlivé kroky: 1. Víme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Podle věty o limitě součinu je $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} \cdot \lim \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$. 2. Z limity násobku: $\lim \frac{5}{n} = 5 \cdot 0 = 0$, $\lim \frac{6}{n^2} = 6 \cdot 0 = 0$, $\lim \frac{4}{n^2} = 4 \cdot 0 = 0$. 3. Z limity rozdílu a součtu v čitateli: $\lim\left(3 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}\right) = 3 - 0 - 0 = 3$. 4. Z limity součtu ve jmenovateli: $\lim\left(2 + \frac{4}{n^2}\right) = 2 + 0 = 2$. 5. Jelikož limita jmenovatele je $2 \neq 0$, použijeme větu o limitě podílu:

$$L = \frac{\lim\left(3 - \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}\right)}{\lim\left(2 + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{3}{2}.$$

4 Limity a nerovnosti

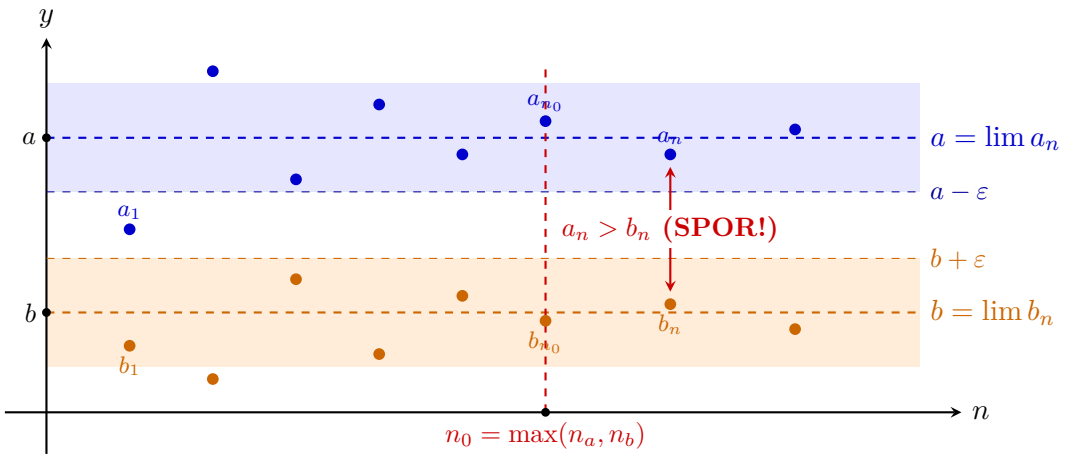
Věta 4.1 (Limitní přechod v nerovnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *jsou konvergentní posloupnosti s limitami* $\lim a_n = a$ *a* $\lim b_n = b$*. Pokud existuje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n \geq n_1$ *platí* $a_n \leq b_n$*, pak* $a \leq b$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $a > b$. Zvolme $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. K tomuto ε existují $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_2$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$ (což implikuje $a_n > a - \varepsilon$) a pro $n \geq n_3$ platí $|b_n - b| < \varepsilon$ (což implikuje $b_n < b + \varepsilon$).

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Pro všechna $n \geq n_0$ platí:

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n.$$

Dostáváme $b_n < a_n$, což je v přímém rozporu s předpokladem $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_1$. Platí tedy $a \leq b$. □



Obrázek 4: Důkaz limitního přechodu v nerovnosti sporem: Pokud by $a > B$, existují disjunktní okolí $U(a)$ a $U(b)$. Od indexu n_0 by pak platilo $a_n > a - \varepsilon > b + \varepsilon > b_n$, což je v rozporu s předpokladem $a_n \leq b_n$.

Poznámka 4.2. Z předpokladu ostré nerovnosti $a_n < b_n$ neplyne pro limity ostrá nerovnost $a < b$, ale pouze neostrá nerovnost $a \leq b$. Jako protipříklad uvažujme posloupnosti $a_n = 0$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$ (neboť $0 < \frac{1}{n}$), avšak $\lim a_n = 0 = \lim b_n$, tedy $a = b$.

Věta 4.3 (O dvou strážnících / Squeeze Theorem)**.** *Nechť* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti, pro které platí:*

1. *Existuje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n \geq n_1$ *je* $a_n \leq b_n \leq c_n$*.*
2. *Posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{c_n\}$ *jsou konvergentní a mají stejnou limitu* $\lim a_n = \lim c_n = L$*.*

Pak je konvergentní i posloupnost $\{b_n\}$ *a platí* $\lim b_n = L$*.*

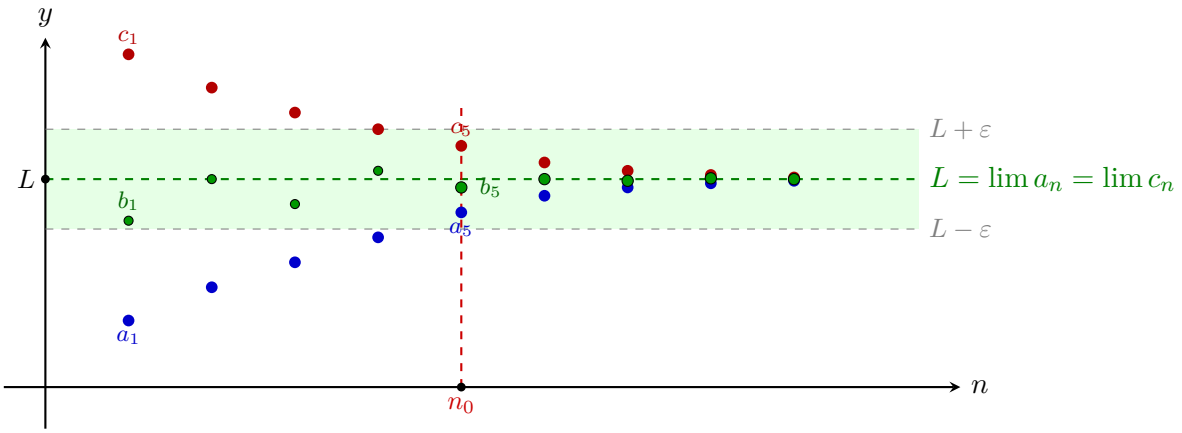
Důkaz. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. K číslu ε existují $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ takové, že:

$$\forall n \geq n_2 : L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \text{a} \quad \forall n \geq n_3 : L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Pro všechna $n \geq n_0$ spojením nerovností dostáváme:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \implies L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \implies |b_n - L| < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{b_n\}$ tedy konverguje k L. □



Obrázek 5: Věta o dvou strážnících: Protože $a_n \leq b_n \leq c_n$ a obě krajní posloupnosti konvergují k L, od indexu n_0 jsou členy a_n i c_n uvnitř ε-pásu. Tím pádem je uvnitř pásu uschována i posloupnost b_n, což dokazuje, že $\lim b_n = L$.

Příklad 4.4. Spočtěme $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$. Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $-1 \leq \sin n \leq 1$, můžeme nerovnost vydělit kladným číslem n:

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Víme, že $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ a $\lim \frac{1}{n} = 0$. Podle Věty o dvou strážnících platí $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

5 Axiom suprema reálných čísel

Definice 5.1 (Horní závoru a supremum)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina.

- Číslo $k \in \mathbb{R}$ nazveme *horní závorou (hranicí)* množiny M, jestliže pro všechna $x \in M$ platí $x \leq k$.
- Množina M se nazývá *shora omezená*, má-li alespoň jednu horní závoru.
- Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme *supremem* množiny M (zapisujeme $s = \sup M$), jestliže:
  1. s je horní závorou množiny M ($\forall x \in M : x \leq s$),
  2. s je nejmenší horní závorou množiny M (tj. pro každé $s' < s$ existuje $x \in M$ takové, že $x > s'$).

Příklad 5.2. Uvažujme množinu $M = \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$. Dokážeme podrobně, že $\sup M = 1$.

1. Ověříme 1. podmínku suprema: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n < n + 1$, a tudíž $\frac{n}{n+1} < 1$. Číslo 1 je tedy horní závorou množiny M.
2. Ověříme 2. podmínku suprema: Nechť $s' < 1$. Položme $\varepsilon = 1 - s' > 0$. Hledáme prvek $x = \frac{n}{n+1} \in M$ takový, že $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$. Upravíme nerovnost:

   $$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

   Podle Archimedeovy vlastnosti takové $n \in \mathbb{N}$ vždy existuje. Tím je dokázáno, že $\sup M = 1$.

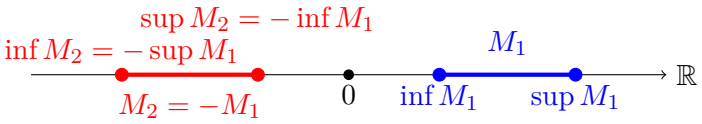
Definice 5.3 (Axiom suprema)**.** Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má v množině $\mathbb{R}$ supremum.

Poznámka 5.4. Axiom suprema vyjadřuje fundamentální vlastnost spojitosti (úplnosti) reálných čísel. V množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ tento axiom neplatí. Uvažujeme-li např. množinu $M = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$, tato množina je v $\mathbb{Q}$ shora omezená, ale nemá v $\mathbb{Q}$ supremum (její supremum v $\mathbb{R}$ je $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). To je hlavním důvodem, proč zkoumáme matematickou analýzu na množině $\mathbb{R}$.

Analogicky definujeme dolní závoru a infimum jako největší dolní závoru ($\inf M$).

Věta 5.5. *Nechť $M_1 \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina a definujme $M_2 := \{-x \mid x \in M_1\}$. Pak existuje $\inf M_1$ a platí $\inf M_1 = -\sup M_2$.*

Důkaz. Množina M_1 je shora omezená, tedy M_2 je zdola omezená. Z axiomu suprema a vlastností symetrie reálné osy plyne existence $s = \sup M_2$. Ukážeme, že $-s = \inf M_1$: 1. Pro libovolné $y \in M_2$ platí $y \leq s$. Jelikož prvek $x \in M_1$ lze zapsat jako $x = -y$, platí $-x \leq s \implies x \geq -s$. Tedy $-s$ je dolní závorou množiny M_1. 2. Nechť $k > -s$, tedy $-k < s$. Protože $s = \sup M_2$, existuje $y \in M_2$ takové, že $y > -k$. Pak pro $x = -y \in M_1$ platí $x < k$. Číslo $-s$ je tedy největší dolní závorou M_1, neboli $\inf M_1 = -s = -\sup M_2$. □



Obrázek 6: Vztah mezi množinou M_1 a zrcadlenou množinou $M_2 = \{-x \mid x \in M_1\}$ na reálné ose.

6 Omezenost posloupností a vybrané posloupnosti

Definice 6.1 (Omezená posloupnost)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je:

- *shora omezená*, jestliže je shora omezená množina jejích členů $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tj. $\exists K \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$;
- *zdola omezená*, jestliže je zdola omezená množina jejích členů, tj. $\exists k \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$;
- *omezená*, jestliže je shora i zdola omezená, tj. $\exists M > 0\, \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$.

Věta 6.2 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Nechť $\lim a_n = a$. Zvolme v definici limity $\varepsilon = 1$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < 1$, z čehož podle trojúhelníkové nerovnosti plyne $|a_n| < |a| + 1$. Pro zbývající konečný počet členů $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ definujeme:

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a| + 1\}.$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq M$, takže posloupnost $\{a_n\}$ je omezená. □

Definice 6.3 (Vybraná posloupnost)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel (tj. $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$). Posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *vybranou posloupností* (nebo *podposloupností*) z posloupnosti $\{a_n\}$.

Věta 6.4 (O konvergenci vybrané posloupnosti)**.** *Je-li posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní a platí $\lim a_n = a$, pak každá její vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}$ je rovněž konvergentní a má stejnou limitu $\lim a_{k_n} = a$.*

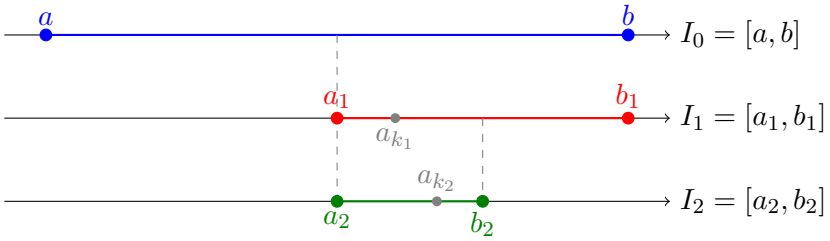
Důkaz. Indukcí snadno ukážeme, že pro každou rostoucí posloupnost indexů $k_n \in \mathbb{N}$ platí $k_n \geq n$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to a$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Pro libovolné $n \geq n_0$ platí $k_n \geq n \geq n_0$, a proto $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Tedy $a_{k_n} \to a$. □

Věta 6.5 (Bolzanova-Weierstrassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Důkaz provedeme metodou půlení intervalů. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, všechny její členy leží v jistém uzavřeném intervalu $I_0 = [a, b]$. Rozdělíme interval I_0 středovým bodem na dva podintervaly rovnokapacity. Aespoň jeden z těchto podintervalů musí obsahovat nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Označme tento podinterval $I_1 = [a_1, b_1]$ a zvolme $a_{k_1} \in I_1$.

Podobně rozpoltíme I_1 na dva díly a vybereme ten díl $I_2 = [a_2, b_2]$, který obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti. Vybereme člen $a_{k_2} \in I_2$ s indexem $k_2 > k_1$.

Tímto postupem indukce získáme posloupnost vnořených intervalů $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$, jejichž délka je $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, a vybranou posloupnost $\{a_{k_n}\}$ splňující $a_{k_n} \in I_n$. Z principu vnořených intervalů existuje jediný společný bod $L = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. Jelikož $a_{k_n} \in I_n$ a $L \in I_n$, platí $|a_{k_n} - L| \leq |I_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, z čehož plyne $\lim a_{k_n} = L$. □



Obrázek 7: Konstrukce vnořených intervalů $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \ldots$ metodou půlení intervalů.

7 Konvergence monotónních posloupností

Věta 7.1 (O konvergenci monotónní omezené posloupnosti)**.** *Každá rostoucí shora omezená posloupnost je konvergentní a její limita je rovna supremu množiny jejích členů.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}$ je rostoucí shora omezená posloupnost. Množina $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná a shora omezená. Podle Axiomu suprema existuje $L = \sup M \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $\lim a_n = L$.

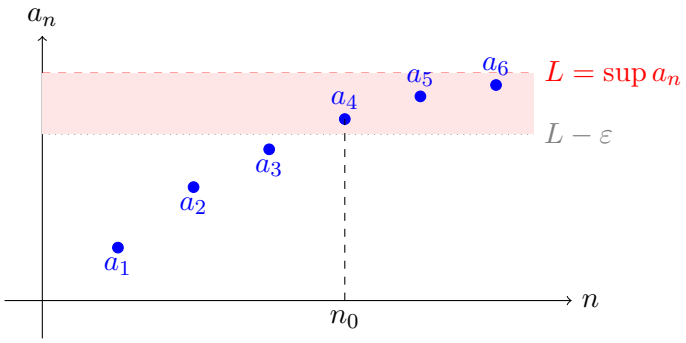
Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Protože $L = \sup M$, číslo $L - \varepsilon$ není horní závorou množiny M. Proto existuje prvek $a_{n_0} \in M$ takový, že $a_{n_0} > L - \varepsilon$. Jelikož je posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí, pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n_0} > L - \varepsilon$. Zároveň je L horní závorou M, takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq L < L + \varepsilon$. Celkem tedy pro všechna $n \geq n_0$ máme:

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

Tudíž $\lim a_n = L$. □

Poznámka 7.2. Pro ostře monotónní posloupnosti představuje limita přirozenou mez (hranici), ke které se posloupnost neomezeně přibližuje, ale žádným svým členem jí nedosáhne (všechny členy rostoucí posloupnosti leží ostře pod limitou: $a_n < L$).

Příklad 7.3. Pro posloupnost $b_n = \frac{n}{n+1}$ jsme v 1. kapitole odvodili, že je rostoucí a v 5. kapitole dokázali, že $\sup\{b_n\} = 1$. Podle předchozí věty je limita $\lim \frac{n}{n+1} = 1$. Při zadání $\varepsilon > 0$ z definice limity řešíme nerovnost $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Zvolíme-li $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, pak pro všechna $n \geq n_0$ platí $|b_n - 1| < \varepsilon$.



Obrázek 8: Konvergence rostoucí shora omezené posloupnosti k supremu L.

Poznámka 7.4. Zdůrazněme opět neplatnost věty na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Uvažujme posloupnost desítkových rozvojů čísla $\sqrt{2}$:

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}, \quad \text{tj.} \quad a_1 = 1{,}4;\ a_2 = 1{,}41;\ a_3 = 1{,}414; \ldots$$

Tato posloupnost je rostoucí a shora omezená v $\mathbb{Q}$ (např. číslem 2), avšak nemá v $\mathbb{Q}$ limitu, neboť $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

8 Úplnost reálných čísel

Definice 8.1 (Cauchyovská posloupnost)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *cauchyovská*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0$, platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Věta 8.2. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Nechť $\lim a_n = a$. Zvolme $\varepsilon > 0$. K číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro libovolné dva indexy $m, n \geq n_0$ dostáváme užitím trojúhelníkové nerovnosti:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je tedy cauchyovská. □

Věta 8.3 (Bolzano-Cauchyovo kritérium úplnosti)**.** *Posloupnost reálných čísel je konvergentní právě tehdy, když je cauchyovská.*

Důkaz. Implikaci „konvergentní $\implies$ cauchyovská“ jsme již dokázali. Dokážeme opačnou implikaci „cauchyovská $\implies$ konvergentní“: 1. Nechť $\{a_n\}$ je cauchyovská. Nejprve ukážeme, že je omezená. Pro $\varepsilon = 1$ existuje n_0 tak, že pro $m, n \geq n_0$ je $|a_n - a_m| < 1$. Fixujeme-li $m = n_0$, máme pro $n \geq n_0$ nerovnost $|a_n| < |a_{n_0}| + 1$. Omezenost z toho plyne stejně jako v důkazu věty o omezenosti. 2. Jelikož je $\{a_n\}$ omezená, podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje vybraná podposloupnost $\{a_{k_n}\}$, která konverguje k jistému $L \in \mathbb{R}$. 3. Ukážeme, že k L konverguje i celá posloupnost $\{a_n\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z cauchyovskosti existuje n_1 tak, že pro $n, m \geq n_1$ je $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Z konvergence $a_{k_n} \to L$ existuje n_2 tak, že pro $k_n \geq n_2$ je $|a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme $N = \max\{n_1, n_2\}$. Pro $n \geq N$ vybere index $k_n \geq n \geq N$ a dostáváme:

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $\lim a_n = L$. □

Poznámka 8.4. Vlastnost, že každá cauchyovská posloupnost je konvergentní, se nazývá *úplnost* metrického prostoru reálných čísel $\mathbb{R}$. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ není úplná (výše uvedená cauchyovská posloupnost desítkových rozvojů $\sqrt{2}$ nemá v $\mathbb{Q}$ limitu).

9 Didaktický nadhled, miskoncepce a historie

Didaktická poznámka 9.1 (Intuitivní pojem limity vs. obecná definice)**.** Pro ostře monotónní posloupnosti je koncept limity velice intuitivní a přirozeně odpovídá představě „nedosažitelné meze“, ke které se členy neustále přibližují. Tato hluboce zakořeněná intuice z ostře monotónních případů však často vede k rozšířené žákovské a studentské miskoncepci: *„Limita je číslo, ke kterému se posloupnost blíží, ale nikdy k němu nedorazí.“*

Tato miskoncepce naráží na konstantní posloupnost $a_n = c$ (kde je limita c dosažena všemi členy již od prvního) nebo na oscilující posloupnosti. Například posloupnost $a_n = \frac{\sin n}{n}$ kolem své limity 0 střídavě kmitá, a u její spojité analogie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je limita 0 při $x \to \infty$ dokonce nabyta nekonečněkrát.

Úkolem učitele je provést studenty přechodem od intuitivního vnímání limity k rigoróznímu ε-n_0 jazyku, který popisuje „konečnou vzdálenost od limity po jistém indexu“, nikoli fyzikální pohyb.

Stručné historické souvislosti

- **Zeno z Eleje (5. stol. př. n. l.):** Svými slavnými paradoxy (Achilles a želva, Šíp) formuloval prvotní filosofické otazníky nad nekonečným dělením prostoru a času, které v moderní řeči odpovídají součtům nekonečných řad a limitním přechodům.
- **Augustin-Louis Cauchy (1789–1857):** Učinil průlom v arithmetizaci matematické analýzy. Nahradil dosavadní vágní pojmy „nekonečně malých veličin“ formalizovanou definicí limity pomocí rozdílů hodnot.
- **Karl Weierstrass (1815–1897):** Dovršil přísnou formalizaci analýzy zavedením dnes standardní ε–δ (resp. ε–n_0) definice, čímž definitivně zbavil matematickou analýzu závislosti na geometrické intuici.