

Trojúhelníková nerovnost a algebraické odhady pro aritmetiku limit

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

ve spolupráci s jazykovým modelem Gemini, model 3.6 thinking

21. října 2026

Obsah

1	Trojúhelníková nerovnost a její varianty	1
2	Algebraický odhad odchylky součtu	3
3	Algebraický odhad odchylky součinu	4
4	Neřešené úlohy a cvičení	5
5	Didakticko-metodické poznámky (pro budoucí učitele)	5
6	Metodika použitá při tvorbě textu	6

Charakteristika textu

Tento studijní materiál je určen pro studenty učitelství matematiky jako podklad pro hlubší porozumění algebraickým vlastnostem reálných čísel, konkrétně trojúhelníkové nerovnosti a odhadům odchylek. Tyto koncepty tvoří klíčový most mezi elementární algebrou a reálnou analýzou — představují nezbytnou algebraickou přípravu pro pozdější důkazy vět o aritmetice limit posloupností a funkcí (ε - N resp. ε - δ techniky).

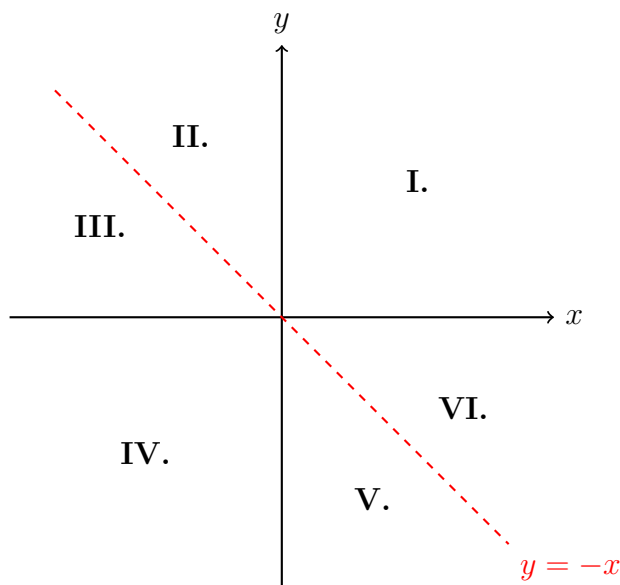
1 Trojúhelníková nerovnost a její varianty

Základní tvar

Věta 1 (Trojúhelníková nerovnost pro dvě čísla). Pro libovolná reálná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Důkaz lze provést rozbořem případů podle znamének výrazů x , y a $x + y$. V rovinném souřadnicovém systému xy rozděluje dvojice os x, y a přímka $x + y = 0$ (tj. $y = -x$) rovinu na 6 diskrétních oblastí (sektorů), jak znázorňuje obrázek 1.



Obrázek 1: Rozdělení roviny xy na 6 oblastí podle znamének x , y a $x + y$.

Provedeme podrobný důkaz pro dvě vybrané oblasti:

1. **Oblast I** ($x \geq 0, y \geq 0$): V této oblasti je $x + y \geq 0$. Podle definice absolutní hodnoty platí $|x| = x$, $|y| = y$ a $|x + y| = x + y$. Platí tedy:

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|.$$

Nerovnost platí (nastává dokonce rovnost).

2. **Oblast VI** ($x \geq 0, y < 0, x + y \geq 0$): Zde je $|x| = x$, $|y| = -y$ a jelikož $x + y \geq 0$, je $|x + y| = x + y$. Z předpokladu $y < 0$ plyne $-y > y$, a tedy $x - y > x + y$. Dosazením absolutních hodnot dostáváme:

$$|x + y| = x + y < x - y = |x| + |y|.$$

Nerovnost tedy platí ostrá.

Poznámka: Provedení důkazu pro zbývajících 4 oblastí (II, III, IV, V) je ponecháno studentům jako cvičení. $\square$

Zobecnění pro n sčítanců

Věta 2 (Zobecněná trojúhelníková nerovnost). Pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) platí:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Důkaz pro 3 a 4 sčítance a všeobecný důkaz indukcí.

- **Pro $n = 3$ sčítance:** S využitím asociativity sčítání a základní trojúhelníkové nerovnosti aplikované dvakrát dostáváme:

$$|x_1 + x_2 + x_3| = |(x_1 + x_2) + x_3| \leq |x_1 + x_2| + |x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

- **Pro $n = 4$ sčítance:** Obdobně seskupením výrazů:

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| = |(x_1 + x_2 + x_3) + x_4| \leq |x_1 + x_2 + x_3| + |x_4| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|.$$

- **Všeobecný důkaz matematickou indukcí pro libovolné $n \in \mathbb{N}$:**

1. *Báze indukce ($n = 1$ a $n = 2$):* Pro $n = 1$ platí $|x_1| \leq |x_1|$ triviálně. Pro $n = 2$ platí základní trojúhelníková nerovnost.
2. *Indukční krok ($n \rightarrow n + 1$):* Předpokládejme, že tvrzení platí pro n sčítanců, tj. $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$. Dokážeme platnost pro $n + 1$ sčítanců:

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| + |x_{n+1}|.$$

Aplikací indukčního předpokladu na první člen dostáváme:

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| + |x_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|.$$

Tím je indukční krok i celý důkaz dokončen.

□

Reverzní trojúhelníková nerovnost

Věta 3 (Reverzní trojúhelníková nerovnost). Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Důkaz. Vyjádříme x pomocí identity $x = (x - y) + y$ a použijeme základní trojúhelníkovou nerovnost:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Analogicky vyjádříme $y = (y - x) + x$:

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x - y| \implies -(|x| - |y|) \leq |x - y|.$$

Spojením obou nerovností dostáváme požadovaný vztah $||x| - |y|| \leq |x - y|$. □

Metodický význam: Reverzní trojúhelníková nerovnost představuje zásadní algebraický nástroj pro dolní odhad jmenovatele při důkazu limity podílu $\lim \frac{1}{g(x)}$, kde potřebujeme ukázat, že $|g(x)|$ je zdola ohraničeno kladnou konstantou.

2 Algebraický odhad odchylky součtu

Při důkazu limity součtu posloupností nebo funkcí pracujeme s odchylkami aproximací A a B od jejich limitních hodnot a a b .

Odhad odchylky součtu

Nechť $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Předpokládejme, že platí odhady odchylek:

$$|A - a| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |B - b| < \varepsilon.$$

Chceme odhadnout odchylku součtu $(A + B)$ od $(a + b)$:

$$|(A + B) - (a + b)| = |(A - a) + (B - b)| \leq |A - a| + |B - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Technika předchozí volby $\frac{\varepsilon}{2}$

Při formálním důkazu limity $A + B \rightarrow a + b$ požadujeme, aby výsledný rozdíl byl menší než předem zadané libovolné $\varepsilon > 0$. K tomu využíváme techniku rozdělení ε :

Pokud upravíme předpokládané tolerance na $\frac{\varepsilon}{2}$, tj.:

$$|A - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |B - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pak po aplikaci trojúhelníkové nerovnosti obdržíme požadovaný odhad:

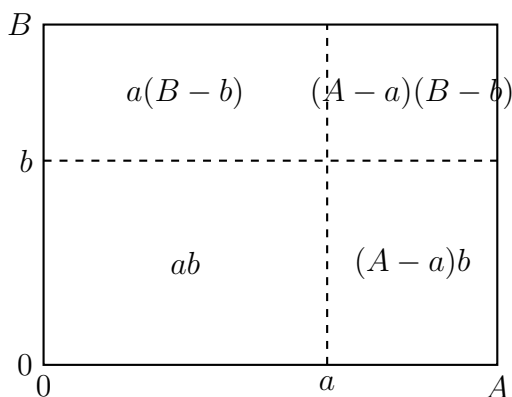
$$|(A + B) - (a + b)| \leq |A - a| + |B - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tento postup je standardní konstrukcí v důkazech vět o aritmetice limit.

3 Algebraický odhad odchylky součinu

Geometrický model

Uvažujme kladná reálná čísla $A > a > 0$ a $B > b > 0$. Výraz $AB - ab$ představuje rozdíl obsahů dvou obdélníků o rozměrech $A \times B$ a $a \times b$. Jak ukazuje Obrázek 2, velký obdélník lze rozložit na čtyři menší oblasti:



Obrázek 2: Geometrický rozklad rozdílu obsahů $AB - ab$.

Algebraická identita

Z geometrického rozpadu obdélníku přímo plyne algebraická identita:

$$AB - ab = (A - a)b + a(B - b) + (A - a)(B - b).$$

Případně ze sloučení posledních dvou členů obdržíme známou dvoučlennou variantu:

$$AB - ab = (A - a)b + A(B - b) \quad \text{resp.} \quad AB - ab = (A - a)B + a(B - b).$$

Použití trojúhelníkové nerovnosti

Použitím trojúhelníkové nerovnosti na tříčlennou identitu získáme odhad odchylky součinu pro obecná reálná čísla:

$$|AB - ab| = |(A - a)b + a(B - b) + (A - a)(B - b)| \leq |A - a||b| + |a||B - b| + |A - a||B - b|.$$

4 Neřešené úlohy a cvičení

1. **Dokončení důkazu trojúhelníkové nerovnosti:** V sekci 1 byl proveden důkaz pro oblasti I a VI. Proveďte podrobný důkaz trojúhelníkové nerovnosti pro zbývající čtyři oblasti (II, III, IV, V) v souřadnicové rovině.
2. **Algebraická identita součinu:** Ověřte čistě algebraickým výpočtem (úpravou výrazů), že identita

$$AB - ab = (A - a)b + a(B - b) + (A - a)(B - b)$$

platí pro libovolná reálná čísla $A, B, a, b \in \mathbb{R}$ bez ohledu na jejich znaménko.

3. **Odhad odchylky součinu 1:** Ukažte, že pokud pro odchylky platí $|A - a| < \varepsilon$ a $|B - b| < \varepsilon$, potom platí odhad:

$$|AB - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon).$$

4. **Odhad odchylky součinu 2:** Dokažte, že přidáním předpokladu $\varepsilon < 1$ dostaneme z předchozí úlohy zjednodušený odhad:

$$|AB - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1).$$

5. **Trojúhelníková nerovnost pro 10 sčítanců:** Zformulujte a dokažte trojúhelníkovou nerovnost přímo pro $n = 10$ sčítanců bez použití obecné matematické indukce (pouze opakovaným použitím základní trojúhelníkové nerovnosti).

5 Didakticko-metodické poznámky (pro budoucí učitele)

- **Typické žákovské a studentské chyby:**

- *Chybný lineární přechod:* Žáci mají tendenci psát $|x + y| = |x| + |y|$ i pro čísla opačných znamének. Je nutné zdůrazňovat, kdy nastává rovnost (stejná znaménka nebo nulovost) a kdy ostrá nerovnost.
- *Nepochopení reverzní nerovnosti:* Odhad $||x| - |y|| \leq |x - y|$ bývá pro studenty neintuitivní. Často chybují při odhadování jmenovatelů zlomků, kde zaměňují horní a dolní odhady.
- *Práce s nerovnostmi při násobení:* Častou chybou je násobení nerovností zápornými čísly bez změny směru nerovnosti nebo neoprávněné násobení dvou nerovností mezi sebou.

- **Význam oddělení algebraické přípravy od logiky limit:**

- *Kognitivní zátěž*: Důkazy limit podle Cauchyho (ε - δ) nebo Heineho definice kombinují složitou kvantifikační strukturu ($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \dots$) s technickými algebraickými úpravami.
- *Didaktická strategie*: Pokud se studenti učí řešit algebraické odhady odchylek samostatně ještě před zavedením samotného pojmu limita, výrazně se sníží jejich kognitivní zátěž. Při samotném důkazu věty o limitě součtu či součinu pak již uplatňují známé algebraické vzorce a mohou se plně soustředit na pochopení kvantifikátorové logiky.

6 Metodika použitá při tvorbě textu

Text jsem vytvořila ve spolupráci s jazykovým modelem (LLM) Gemini, model 3.6 thinking. Nejdříve jsem sepsala osnovu textu. Osnovu jsme pak spolu s LLM zrevidovali a tuto osnovu jsem pak LLM předala jako součást dalšího promptu. Vytvořený text jsem pak přečetla tak, abych mohla ručit za každé jeho slovo.