

Úlohy k přípravě na zkoušku z PAN1/KAN1

12. října 2026

1. Pro zadanou funkci f řešte úlohy

- (a) Uvažujte obecnou hodnotu $c \in \mathbb{R}$. Vyřešte početně rovnici $f(x) = c$ s parametrem $c \in \mathbb{R}$. Proveďte podrobnou diskusi počtu reálných kořenů v závislosti na hodnotě parametru c a napište tyto kořeny.
- (b) Na základě výsledků bodu (a) odpovězte na následující otázky:
 - Jaký je obor hodnot $H(f)$ funkce f ?
 - Je funkce f prostá na celém svém definičním oboru $D(f)$?
 - Existuje k funkci f na $D(f)$ funkce inverzní?
 - Je funkce f omezená na svém definičním oboru?

1a Navíc: (c) napište definici prosté funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

1b Navíc: (c) napište definici oboru hodnot funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x + 2}$$

1c Navíc: (c) napište definici omezené funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

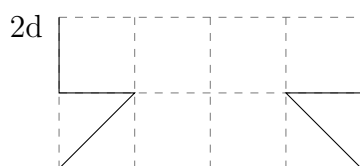
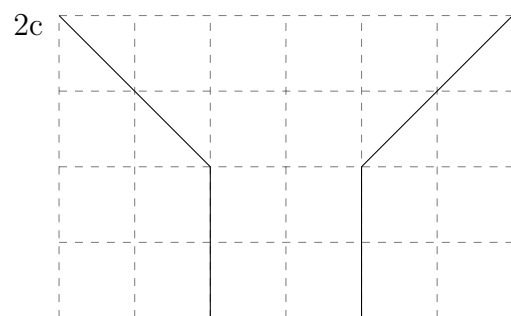
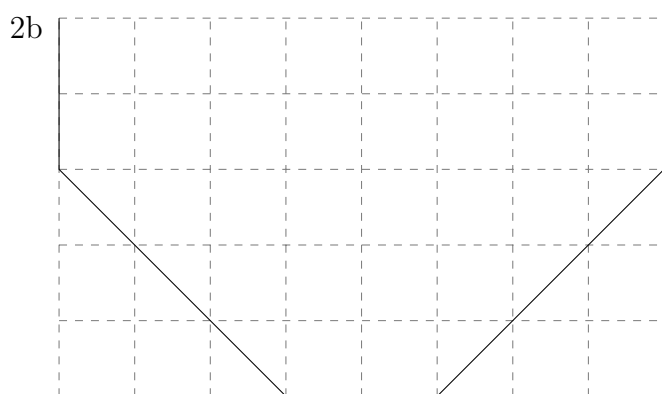
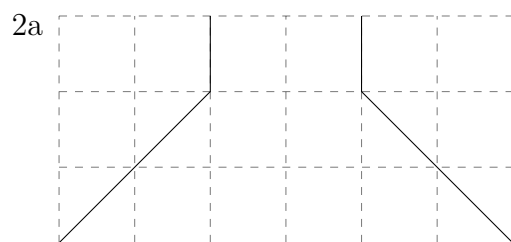
$$f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

2. Na obrázku je znázorněn osový řez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- (a) Odvoďte předpis funkce $S(h)$, která vyjadřuje závislost obsahu hladiny na výšce vody h . Načrtněte graf této funkce.
- (b) Odvoďte předpis funkce $V(h)$, která vyjadřuje závislost objemu vody v nádobě pod hladinou na její výšce h . Do grafu této závislosti vyznačte hodnoty v krajních bodech definičního oboru a hodnotu v bodě, ve kterém se nádoba „láme“, body spojte odpovídajícím průběhem (konvexním, konkávním, nebo úsečkou) a svou volbu zdůvodněte.

K odvození použijte geometrii, nepoužívejte integrály.

(c) Výsledek bodu (b) ověřte derivováním a analýzou spojitosti.



3. Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Ekvivalentní úpravu pak použijte k vyřešení nerovnice.

3a

$$\sqrt{2x^2 - 7} \geq x - 1$$

3b

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 9} \leq 2x + 1$$

3c

$$\sqrt{4x - 7} \geq x - 1$$

4. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a . Tečnu zakreslete do soustavy souřadné.

4a

$$f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{x^3} \quad a = 1$$

4b

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2 - \sqrt{x^5}} \quad a = 1$$

4c

$$f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{5 - x^2} \quad a = 2$$

4d

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad a = 3$$

5. Odvoďte z definice derivace vzorec pro derivaci funkce. Výsledek ověřte zderivováním funkce za pomoci vzorců.

5a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

5b

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

5c

$$f(x) = x^5$$

5d

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

5e

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$$

5f

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 5}$$