Úlohy na cvičení dne 18. listopadu 2026

1. Napište definici limity posloupnosti a ukažte, že pro konstantní posloupnost platí
$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a H je horní hranice M, D je dolní hranice M. Ukažte, že pak platí $D \leq H$.

   Návod: uvažujte $x \in M$ a napište nerovnosti pro x, D, H.

3. Rozmyslete si, že všechna reálná čísla jsou dolní závory prázdné množiny. A zároveň všechna reálná čísla jsou horní závory prázdné množiny.

   Neplatí tedy obecně tvrzení $D \leq H$, které jsme výše ukázali pro neprázdnou množinu.

   Návod:
   Pokud budete mít problém určit pravdivost výroku $\forall x \in \emptyset : x \leq H$, určete nejdříve pravdivost jeho negace.

4. Dokažte větu o konvergenci omezené klesající posloupnosti.

5. Na přednášce jsme dokazovali větu o aritmetice limit posloupnosti. Odvodili jsme pro $b > 0$ nerovnosti
$$|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}, \qquad |b_n| > \frac{b}{2}$$
   Vaším úkolem je z těchto dvou nerovností odvodit nerovnost
$$\frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{2\tilde{\varepsilon}}{b^2}$$

6. Na přednášce jsme dokázali, že pro $b > 0$ platí implikace
$$\lim b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$
   Dokažte stejnou implikaci i pro $b < 0$.

   Návod: Použijte posloupnost $c_n = -b_n$.

7. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=5}^{\infty}$ je zdola omezená a její dolní hranici označme D_5.

   Vyjádřete dolní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí jejích členů a čísla D_5.

8. Při důkazu věty o omezenosti konvergentní posloupnosti jsme ukázali, že pro $n \geq n_1$ platí
$$a_n > a - 1$$
   Určete dolní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ pro $n_0 < n_1$.