Úlohy na cvičení dne 25. listopadu 2026

1. Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jsou za předpokladu $\varepsilon > 0$ následující výroky ekvivalentní.

   (i) $|x - 3| < \varepsilon$

   (ii) $x \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$

2. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$.

   Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jsou následující výroky ekvivalentní.

   (i) $|x - a| < \varepsilon$

   (ii) $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

3. V souřadné rovině zvolte bod $[a, b]$ kdekoliv mimo osy x, y. Souřadnou rovinu rozdělte na části podle platnosti výroků

   $$|x - a| < 0.5, \qquad |y - b| < 0.2$$

   a vyšrafujte tu část roviny, ve které je pravdivá implikace

   $$|x - a| < 0.5 \quad \Longrightarrow \quad |y - b| < 0.2$$

4. Napište negaci výroku

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(a) : \ f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

5. Napište definici limity posloupnosti a ukažte, že pro konstantní posloupnost platí

   $$\lim_{n \to \infty} c = c$$

6. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a H je horní hranice M, D je dolní hranice M. Ukažte, že pak platí $D \leq H$.

   Návod: uvažujte $x \in M$ a napište nerovnosti pro x, D, H.

7. Rozmyslete si, že všechna reálná čísla jsou dolní závory prázdné množiny. A zároveň všechna reálná čísla jsou horní závory prázdné množiny.

   Neplatí tedy obecně tvrzení $D \leq H$, které jsme výše ukázali pro neprázdnou množinu.

   Návod:
   Pokud budete mít problém určit pravdivost výroku $\forall x \in \emptyset : x \leq H$, určete nejdříve pravdivost jeho negace.

8. Dokažte větu o konvergenci omezené klesající posloupnosti.

9. Na přednášce jsme dokázali, že pro $b > 0$ platí implikace

$$\lim b_n = b \quad \Longrightarrow \quad \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

Dokažte stejnou implikaci i pro $b < 0$.

Návod: Použijte posloupnost $c_n = -b_n$.