

Čtvrtá série úloh ze středoškolské matematiky pro studenty FP TUL

Cíl: zopakovat aritmetickou a geometrickou posloupnost.
Procvičit souvislost s aritmetickým a geometrickým průměrem
(1. a 2. úloha, v závěru je výklad a návod). Ukázat a procvičit
praktické úlohy na geometrickou posloupnost (3., 4., 5. a 6.
úloha).

- 1a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří aritmetickou posloupnost. Členy posloupnosti vypočtete.

$$a_1 = x - 1, \quad a_2 = x + 1, \quad a_3 = x^2 - 3$$

1b

$$a_1 = x^2, \quad a_2 = 2x + 1, \quad a_3 = x + 2$$

1c

$$a_1 = x^2 - 5, \quad a_2 = x + 2, \quad a_3 = x - 3$$

- 2a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří geometrickou posloupnost. Členy posloupnosti vypočtete.

$$a_1 = x - 3, \quad a_2 = x + 1, \quad a_3 = 2x + 8$$

2b

$$a_1 = x + 1, \quad a_2 = x + 4, \quad a_3 = 2x$$

2c

$$a_1 = 2x, \quad a_2 = x - 3, \quad a_3 = x + 1$$

3. V bance máte uloženo deset tisíc korun na úrok 10% p.a. Kolik získáte na úrocích za tři roky? Neuvažujte jiné změny na účtu než úroky (například bankovní poplatky).¹
4. Při úroku 5% p.a. se váš vklad zdvojnásobí přibližně za 14 let. Jaký přibližný násobek původního vkladu budete mít za padesát let?

¹Uvědomte si, že zůstatky v jednotlivých letech tvoří geometrickou posloupnost s kvocienem 1.1

5. Při vývoji výpočetní techniky bylo vypořováno, že se výkon počítačů zdvojnásobí přibližně každých 18 měsíců. Tento poznatek byl formulován jako Mooreův zákon. Použijte Mooreův zákon k odhadu změny výkonu počítačů
- (a) za deset let
 - (b) za třicet let
6. Při rychle se šířící nákaze je každý další den o $100\%^2$ více nakažených než den předchozí. O kolik procent více nakažených bude za šest dní (předpokládáme stále stejné tempo šíření nákazy).

Nápověda k první a druhé úloze (souvislost s průměry):

Čísla a_1, a_2, a_3 tvoří aritmetickou posloupnost, pokud je rozdíl (diference) dvou sousedních členů konstantní, tj. pokud platí

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Odtud vyjádříme $a_2 = (a_1 + a_3)/2$, tedy člen aritmetické posloupnosti je roven aritmetickému průměru členu předchozího a následujícího.

Podobně pro geometrickou posloupnost platí

$$a_3/a_2 = a_2/a_1$$

odkud vyjádříme $a_2^2 = a_1 a_3$. Pro nezáporné a_2 dále upravíme $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$, tedy nezáporný člen geometrické posloupnosti je roven geometrickému průměru členu předchozího a následujícího.

²Číslo zvolené kvůli snadnému výpočtu bez kalkulačky. S kalkulačkou spočítejte i pro jiná procenta.