

Úlohy k přípravě na zkoušku z PAN1/KAN1

1. října 2026

1. Pro zadanou funkci f řešte úlohy

- (a) Uvažujte obecnou hodnotu $c \in \mathbb{R}$. Vyřešte početně rovnici $f(x) = c$ s parametrem $c \in \mathbb{R}$. Proveďte podrobnou diskusi počtu reálných kořenů v závislosti na hodnotě parametru c a napište tyto kořeny.
- (b) Na základě výsledků bodu (a) odpovězte na následující otázky:
 - Jaký je obor hodnot $H(f)$ funkce f ?
 - Je funkce f prostá na celém svém definičním oboru $D(f)$?
 - Existuje k funkci f na $D(f)$ funkce inverzní?
 - Je funkce f omezená na svém definičním oboru?

1a Navíc: (c) napište definici prosté funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

1b Navíc: (c) napište definici oboru hodnot funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

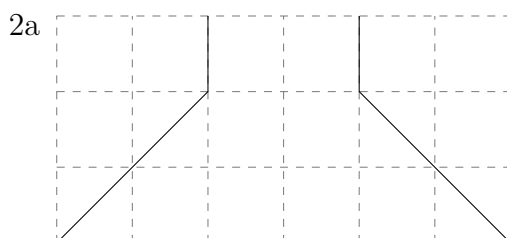
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x + 2}$$

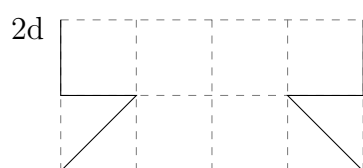
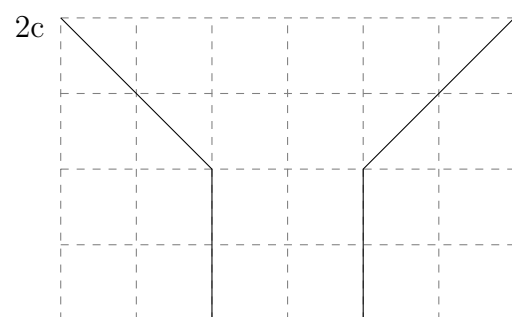
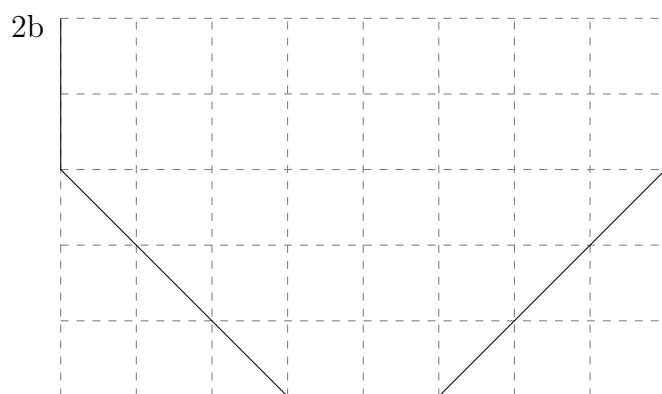
1c Navíc: (c) napište definici omezené funkce a z této definice odvoďte svůj závěr z bodu (b).

$$f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

2. Na obrázku je znázorněn osový řez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- (a) Odvoďte předpis funkce $S(h)$, která vyjadřuje závislost obsahu hladiny na výšce vody h . Načrtněte graf této funkce.
- (b) Odvoďte předpis funkce $V(h)$, která vyjadřuje závislost objemu vody v nádobě pod hladinou na její výšce h . Do grafu této závislosti vyznačte hodnoty v krajních bodech definičního oboru a hodnotu v bodě, ve kterém se nádoba „láme“, body spojte odpovídajícím průběhem (konvexním, konkávním, nebo úsečkou) a svou volbu zdůvodněte.





3. Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Pak s pomocí této úpravy vyřešte nerovnici.

3a

$$\sqrt{2x^2 - 7} \geq x - 1$$

3b

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 9} \leq 2x + 1$$

3c

$$\sqrt{4x - 7} \geq x - 1$$