

Riemannův integrál

Motivace

Chceme vypočíst, nebo alespoň odhadnout, obsah množiny

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x - x^2\}$$

Při výpočtu jsme použili vlastnosti obsahu

- (i) Obsah obdélníku O o stranách a, b je roven $S(O) = ab$.
- (ii) Mají-li množiny M_1, M_2 prázdný průnik, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak je obsah jejich sjednocení roven součtu jejich obsahů

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) \quad (1)$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivita obsahu*.

Vztah (1) platí i v případě, že je průnik množin neprázdný, ale má nulový obsah. Například, když mají dva obdélníky společnou stranu. V obecném případě platí

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) - S(M_1 \cap M_2)$$

- (iii) Je-li $M_1 \subset M_2$, pak je $S(M_1) \leq S(M_2)$.

Tuto vlastnost nazýváme *monotonie obsahu*.

Při definici Riemannova integrálu budeme potřebovat pojmy horní a dolní hranice množiny a supremum a infimum množiny. Připomeneme definice těchto pojmů a vztahy mezi nimi.

Definice 1 (horní a dolní hranice množiny). Číslo $H \in \mathbb{R}$ nazveme *horní hranicí množiny* M , pokud platí

$$\forall x \in M : x \leq H$$

Číslo $D \in \mathbb{R}$ nazveme *dolní hranicí množiny* M , pokud platí

$$\forall x \in M : x \geq D$$

Definice 2 (supremum a infimum množiny). Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je množina.

Číslo $S \in \mathbb{R}$ splňující (i), (ii) nazveme *supremem množiny* M a budeme značit $S = \sup(M)$.

$$(i) \quad \forall x \in M : x \leq S$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > S - \varepsilon$$

Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující (iii), (iv) nazveme *infimem množiny* M a budeme značit $s = \inf(M)$.

$$(iii) \quad \forall x \in M : x \geq s$$

$$(iv) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < s + \varepsilon$$

Z vlastnosti (i) plyne, že supremum množiny je horní hranicí množiny. Následující lemma ukazuje, že supremum množiny je nejmenší horní hranicí množiny.

Lemma 3 (o supremu a horní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo H je horní hranice množiny M .

Pak platí $H \geq \sup(M)$.

Důkaz provedeme nepřímou. Dokážeme implikaci: je-li $H < \sup(M)$, pak H není horní hranicí množiny M .

Zvolme $\varepsilon = \sup(M) - H$. Pak z $H < \sup(M)$ plyne $\varepsilon > 0$.

Z (ii) pak plyne existence $x \in M$ takového, že platí $x > \sup(M) - \varepsilon$.

Dosazením $\varepsilon = \sup(M) - H$ dostaneme $x > \sup(M) - (\sup(M) - H)$ a po úpravě dostaneme $x > H$. Odtud plyne, že H není horní hranice množiny M . $\square$

Jako cvičení dokažte analogické tvrzení pro infimum a dolní hranici.

Lemma 4 (o infimu a dolní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo D je dolní hranice množiny M .

Pak platí $D \leq \inf(M)$.

Definice 5 (Riemannův integrál, riemannovská integrovatelnost funkce).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na intervalu I .

Posloupnost čísel x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ splňující $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i < x_{i+1}$ pro $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ nazveme *dělením intervalu I* . Dělení označíme $D = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Číslo

$$HIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

nazveme *horním integrálním součtem funkce f pro dělení D* .

Číslo

$$DIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

nazveme *dolním integrálním součtem funkce f pro dělení D* .

Dolním Riemannovým integrálem funkce f přes interval I nazveme číslo

$$(R) \int_a^b f(x) dx := \sup\{DIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Horním Riemannovým integrálem funkce f přes interval I nazveme číslo

$$(R) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx := \inf\{HIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Funkci f nazveme *riemannovsky integrovatelnou na intervalu I* , pokud se její dolní a horní Riemannovy integrály rovnají, tedy pokud

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad (2)$$

Společnou hodnotu v (2) pak nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f na intervalu I* a značíme

$$(R) \int_a^b f(x) dx$$

Příklad 6. $I = [0, 1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{5}$ pro $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Spočítáme DIS , HIS .

Příklad 7. $I = [0, 1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{n}$ pro $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Spočítáme DIS , HIS .

Příklad 8. $I = [0, 1]$, f je Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

D je dělení intervalu I . Spočítáme DIS , HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce není riemannovsky integrovatelná na intervalu I .

Příklad 9. $I = [a, b]$, f je konstantní funkce $f(x) = k$, D je dělení intervalu I . Spočítáme DIS , HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce je riemannovsky integrovatelná na intervalu I a platí

$$(R) \int_a^b k \, dx = k(b - a) \tag{3}$$

Lemma 10. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je riemannovsky integrovatelná funkce na intervalu I .

Necht' $c \in I$, $C \in \mathbb{R}$, g je funkce definovaná vztahem

$$g(x) = \begin{cases} C & x = c \\ f(x) & x \in I \setminus \{c\} \end{cases}$$

Pak je funkce g riemannovsky integrovatelná na intervalu I a platí

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx = (R) \int_a^b g(x) \, dx$$

Hlavní myšlenka důkazu. Necht' je $\delta > 0$, $\delta < b - a$. Zvolíme dělení D obsahující interval $I_i := [x_i, x_{i+1}] \ni c$ délky $x_{i+1} - x_i = \delta$.

Pak je

$$|HIS(f, D) - HIS(g, D)| \leq \delta |f(c) - g(c)|$$

Odtud plyne

$$(R) \int_a^{\bar{b}} f(x) \, dx = (R) \int_a^{\bar{b}} g(x) \, dx$$

Podobně pro DIS a dolní Riemannův integrál. $\square$

Poznámka 11. Riemannův integrál jsme definovali na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Z lemma 10 plyne, že změnou funkční hodnoty integrované funkce f v jednom bodě se nezmění hodnota integrálu a nezmění se ani to, zda je funkce f riemannovsky integrovatelná.

Proto nevadí, když funkce v jednom, nebo i ve více, ale konečně mnoha bodech, není definovaná. Z toho důvodu můžeme mluvit o riemannovské integrovatelnosti a Riemannově integrálu funkce na otevřeném omezeném intervalu $I = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Níže v lemma 13 dokážeme postačující podmínku riemannovské integrovatelnosti funkce. V závěru důkazu budeme potřebovat lemma 12, které nyní dokážeme.

Lemma 12 (o limitním přechodu). Necht' $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$ a necht' platí $\forall \varepsilon > 0 : K < \varepsilon$.

Pak je $K = 0$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že $K > 0$. Zvolme $\varepsilon = K/2$. Pak je $\varepsilon > 0$ a $K > \varepsilon$. To je spor s předpokladem $K < \varepsilon$. $\square$

Lemma 13 (o riemannovské integrovatelnosti).

Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na I .

Necht' pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I takové, že platí

$$HIS(f, D) - DIS(f, D) < \varepsilon$$

Pak je funkce f riemannovsky integrovatelná na intervalu I .

Důkaz.

Funkce na uzavřeném intervalu:

Stejnoměrná spojitost

Riemannovská integrovatelnost

Definice 14 (stejnomořná spojitost funkce). Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, f je funkce definovaná na M . Řekneme, že je funkce f *stejnomořně spojitá na množině* M , pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \quad (4)$$

Příklad 15. $I = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, funkce f je spojitá na I . Ukážeme, že není stejnoměrně spojitá na I .

Zvolme $\varepsilon = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{n+1}$.

Pak je $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1$.

Zároveň je $|x_1 - x_2| < \frac{1}{n}$. Volbou $n \geq \frac{1}{\delta}$ dostaneme $\delta \leq \frac{1}{n}$ a odtud dostaneme $|x_1 - x_2| < \frac{1}{n} \leq \delta$.

Závěr: pro každé $\delta > 0$ jsme našli $x_1, x_2 \in I$ splňující $|x_1 - x_2| < \delta$ a zároveň $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Pro $\varepsilon = 1$ tedy neplatí (4) v definici stejnoměrné spojitosti. Odtud plyne, že f není stejnoměrně spojitá funkce na intervalu I .

Lemma 16 (o spojitosti stejnoměrně spojité funkce). Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, f je funkce stejnoměrně spojitá na I . Pak je f spojitá na I .

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $I = (-\infty, \infty)$. Zvolme $x_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I , proto existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A proto je funkce f spojitá v bodě x_0 .

Nechť je nyní $I = (a, b)$ otevřený interval. Označme $d = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$ (vzdálenost bodu x_0 od kraje intervalu). Pak pro $\delta_1 = \min\{d, \delta\}$ a pro $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ je $x \in I$ a $x \in U_\delta(x_0)$. Z (4) pak plyne $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$. A proto je funkce f spojitá v bodě x_0 .

Nechť je nyní $I = [a, b]$, případně $I = [a, b]$. Chceme ukázat, že je funkce f spojitá v bodě a zprava. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I , proto existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, a + \delta)$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Proto je funkce f spojitá v bodě a zprava.

Podobně dokážeme pro intervaly $(a, b]$, $[a, b]$ spojitost funkce f v bodě b zleva.

Dokázali jsme spojitost funkce f v bodech $x_0 \in (a, b)$ a případně spojitost v bodě a zprava a spojitost v bodě b zleva. Proto je funkce f spojitá na intervalu I . $\square$

Věta 17 (o stejnoměrné spojitosti funkce spojité na uzavřeném intervalu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce spojitá na I . Pak je f stejnoměrně spojitá na I .

Věta je v dalším důležitá při důkazu věty o riemannovské integrovatelnosti spojité funkce. Důkaz je mimo rámec přednášené látky, přesto níže pro úplnost uvádíme alespoň jeho hlavní myšlenky.

Hlavní myšlenky důkazu.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že funkce je spojitá na I a není na I stejnoměrně spojitá.

Z negace stejnoměrné spojitosti dostaneme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$$

Zvolme $\delta = 1/n$. Pak existují $a_n, b_n \in I$ taková, že

$$|a_n - b_n| < 1/n, \quad |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$$

Protože je $(a_n)_{n=1}^\infty$ omezená posloupnost, lze z ní vybrat konvergentní posloupnost. Nechť je c limitou této posloupnosti. Protože je I uzavřený interval a $a_n \in I$, plyne odtud $c \in I$.

Označme nyní členy vybrané posloupnosti $A_k = a_{n_k}$ a z posloupnosti (b_n) vyberme odpovídající členy $B_k = b_{n_k}$.

Z $|a_n - b_n| < 1/n$ plyne konvergence posloupnosti (B_k) s limitou c . Ze spojitosti f v bodě c plyne $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k - B_k = 0$, což je spor s $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$. $\square$

Věta 18 (o riemannovské integrovatelnosti spojitě funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce spojitá na I . Pak je f riemannovsky integrovatelná na I .

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zkonstruujeme dělení D intervalu I takové, že

$$HIS(f, D) - DIS(f, D) < \varepsilon \quad (5)$$

Z lemma 13 o riemannovské integrovatelnosti pak plyne riemannovská integrovatelnost funkce f na intervalu I .

Zvolme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu, proto je na něm stejnoměrně spojitá. Protože je $\tilde{\varepsilon} > 0$, existuje $\delta > 0$ splňující

$$\forall y, z \in I : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \tilde{\varepsilon}$$

Zvolme dělení $x_i = a + i\delta$, dokud je $x_i < b$ a následující $x_n = b$.¹

Uvažujme $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a označme interval $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ a jeho střed $c_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Pak pro $x \in I_i$ je $|x - c_i| < \delta$ a tedy

$$|f(x) - f(c_i)| < \tilde{\varepsilon} \quad (6)$$

Po odstranění absolutní hodnoty a úpravě zapíšeme (6)

$$\forall x \in I_i : f(x) < f(c_i) + \tilde{\varepsilon}, \quad \forall x \in I_i : f(x) > f(c_i) - \tilde{\varepsilon} \quad (7)$$

Z (7) plyne, že $f(c_i) + \tilde{\varepsilon}$ je horní hranice množiny $M := \{f(x) : x \in I_i\}$ a $f(c_i) - \tilde{\varepsilon}$ je dolní hranice množiny M . Z lemmat 3, 4 plyne

$$\sup(M) \leq f(c_i) + \tilde{\varepsilon}, \quad (8)$$

$$\inf(M) \geq f(c_i) - \tilde{\varepsilon}. \quad (9)$$

Rovnici (8) vynásobíme $x_{i+1} - x_i$, rovnici (9) vynásobíme $-(x_{i+1} - x_i)$ a rovnice sečteme. Po úpravě pravé strany dostaneme

$$\sup(M)(x_{i+1} - x_i) - \inf(M)(x_{i+1} - x_i) \leq 2\tilde{\varepsilon}(x_{i+1} - x_i) \quad (10)$$

Rovnice (10) pro $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sečteme. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\sup(M)(x_{i+1} - x_i) - \inf(M)(x_{i+1} - x_i)) \leq 2\tilde{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \quad (11)$$

¹Tedy $n = \min\{i \in \mathbb{N} : a + i\delta \geq b\}$.

Na levé straně (11) je rozdíl horního a dolního integrálního součtu $HIS(f, D) - DIS(f, D)$. K úpravě pravé strany použijeme

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = b - a \quad (12)$$

Dosazením $\tilde{\varepsilon} = 2\varepsilon/(b - a)$ a (12) do (11) dostaneme (5).

Odtud plyne, že funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu I .

□

Vlastnosti Riemannova integrálu

Derivace integrálu podle horní meze

Věta 19 (o vlastnostech Riemannova integrálu). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Necht' jsou funkce f, g definované na I .

Pak platí

- (i) Necht' $c \in (a, b)$. Pak je f riemannovsky integrovatelná na I právě když je riemannovsky integrovatelná na obou intervalech $[a, c]$, $[c, b]$ a platí

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx = (R) \int_a^c f(x) \, dx + (R) \int_c^b f(x) \, dx \quad (13)$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru*.

- (ii) Necht' jsou f, g riemannovsky integrovatelné na I . Necht' platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx \leq (R) \int_a^b g(x) \, dx \quad (14)$$

Tuto vlastnost nazýváme *monotonií vzhledem k integrované funkci*.

Hlavní myšlenky důkazu.

Věta 20 důležitá (o derivaci integrálu podle horní meze). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I .

Definujeme pro $t \in (a, b]$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x) \, dx$$

Nechť $t \in (a, b)$ a funkce f je spojitá v bodě t .

Pak je funkce R diferencovatelná v bodě t a platí $R'(t) = f(t)$.

Hlavní myšlenka důkazu. Nechť $h > 0$, $t + h \in (a, b)$. Z aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru plyne

$$R(t + h) = R(t) + (R) \int_t^{t+h} f(x) \, dx$$

Odtud plyne

$$R(t + h) - R(t) = (R) \int_t^{t+h} f(x) \, dx$$

Protože je funkce f spojitá v bodě t , je pro malé h přibližně

$$(R) \int_t^{t+h} f(x) \, dx \doteq hf(t)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{R(t + h) - R(t)}{h} \doteq f(t) \tag{15}$$

Podobně pro $h < 0$, $t + h \in (a, b)$ dostaneme

$$R(t) = R(t + h) + (R) \int_{t+h}^t f(x) \, dx$$

Odtud

$$R(t + h) - R(t) = -(R) \int_{t+h}^t f(x) \, dx$$

a ze spojitosti funkce f v bodě t dostaneme pro malé h přibližně

$$(R) \int_{t+h}^t f(x) \, dx \doteq -hf(t)$$

Odtud dostaneme (15). $\square$

V důkazu se hodí zavést integrál pro obecnější meze, viz následující definice.

Definice 21. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I . Necht $\alpha, \beta \in I$, $\alpha > \beta$. Definujeme

$$\begin{aligned}(R) \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx &= 0 \\(R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= -(R) \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx\end{aligned}$$

Lemma 22. Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I . Necht $\alpha, \beta, \gamma \in I$.

Pak platí

$$(R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + (R) \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = (R) \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \quad (16)$$

Důkaz. Pro $\alpha < \beta < \gamma$ je (16) totožné s (13). Zbývá probrat ostatní možnosti pro α, β, γ . Ukážeme dva případy, ostatní necháme čtenáři jako cvičení.

Necht je $\alpha = \gamma > \beta$. Pak je

$$\begin{aligned}(R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= -(R) \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \\(R) \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx &= (R) \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \\(R) \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx &= 0\end{aligned}$$

Dosazením do (16) dostaneme po úpravě nulu na obou stranách rovnosti, a tedy (16) platí.

Necht je $\beta > \alpha > \gamma$. Pak z (13) plyne

$$(R) \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx + (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (R) \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Dosazením z definice 21 dostaneme

$$-(R) \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + (R) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -(R) \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$$

a odtud po úpravě dostaneme (16). $\square$

Důkaz věty o derivaci integrálu podle horní meze. Pro $t, t + h \in (a, b)$ je

$$R(t + h) - R(t) = \int_t^{t+h} f(x) \, dx$$

Nechť je f spojitá v bodě t . Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (t - \delta, t + \delta)$ je

$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon \quad (17)$$

Zvolme $h \in (0, \delta)$. Pak z (17) a z monotonie integrálu podle integrované funkce plyne

$$(R) \int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon \, dx \leq (R) \int_t^{t+h} f(x) \, dx \leq (R) \int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon \, dx$$

Integrál z konstantní funkce je roven dle (3)

$$(R) \int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon \, dx = (f(t) - \varepsilon)h, \quad (R) \int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon \, dx = (f(t) + \varepsilon)h.$$

Odtud dostaneme

$$(f(t) - \varepsilon)h \leq R(t + h) - R(t) \leq (f(t) + \varepsilon)h$$

Nerovnosti vydělíme $h > 0$ a odečteme $f(t)$. Dostaneme

$$-\varepsilon \leq \frac{R(t + h) - R(t)}{h} - f(t) \leq \varepsilon \quad (18)$$

Odtud plyne

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{R(t + h) - R(t)}{h} = f(t) \quad (19)$$

Podobně pro $h \in (-\delta, 0)$ dostaneme

$$(R) \int_{t+h}^t f(t) - \varepsilon \, dx \leq (R) \int_{t+h}^t f(x) \, dx \leq (R) \int_{t+h}^t f(t) + \varepsilon \, dx$$

odtud

$$-h(f(t) - \varepsilon) \leq R(t) - R(t + h) \leq -h(f(t) + \varepsilon)$$

Odtud vydělením $-h > 0$ a odečtením $f(t)$ dostaneme (18) a dále

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{R(t + h) - R(t)}{h} = f(t) \quad (20)$$

Z (19), (20) pak plyne $R'(t) = f(t)$. $\square$

Věta 23 důležitá. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $I = (a, b)$. Nechť f je funkce spojitá na I .

Nechť $c \in I$. Definujme funkci R_c vztahem

$$R_c(t) := (R) \int_c^t f(x) \, dx \quad (21)$$

Pak je f_c diferencovatelná na I a platí $R'_c = f$.

Důkaz. Nechť je $t > c$. Pak vztah $R'_c(t) = f(t)$ plyne z věty o derivování integrálu podle horní meze.

Nechť je $t \leq c$. Zvolme $c_0 \in (a, t)$. Pak z aditivity integrálu podle integračního oboru plyne

$$(R) \int_{c_0}^t f(x) \, dx + (R) \int_t^c f(x) \, dx = (R) \int_{c_0}^c f(x) \, dx$$

Odtud po úpravě a dosazení z (21) dostaneme

$$R_c(t) = (R) \int_{c_0}^t f(x) \, dx - (R) \int_{c_0}^c f(x) \, dx$$

Na pravé straně zderivujeme levý integrál podle horní meze a dostaneme $f(t)$. Pravý integrál je konstantní (nezávisí na proměnné t), jeho derivace je tedy rovna nule.

Dostáváme tedy $R'_c(t) = f(t)$. $\square$

Lemma 24. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I . Označme pro $t \in (a, b)$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x) \, dx$$

Pak platí

$$\lim_{t \rightarrow a^+} R(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow b^-} R(t) = (R) \int_a^b f(x) \, dx$$

Důkaz.

Primitivní funkce

Definice 25 (primitivní funkce). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Necht' je funkce f definovaná na intervalu I .

Funkci F definovanou na I nazveme *primitivní funkci funkce f na intervalu I* , pokud platí

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x) \quad (22)$$

Příklad 26. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log|x|$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (-\infty, 0)$.

Příklad 27. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log(2x)$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, \infty)$.

Věta 28 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, f je funkce f definovaná na intervalu I . Nechť F_1, F_2 jsou primitivní funkce funkce f na intervalu I .

Pak platí

$$\exists C \in \mathbb{R} \forall x \in I : F_2(x) = F_1(x) + C$$

Důkaz.

Věta 29 důležitá (o existenci primitivní funkce ke spojité funkci). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I .

Pak existuje funkce F primitivní k f na I .

Důkaz. Zvolme $x_0 \in I$. Protože je funkce f spojitá na intervalu I , existuje dle věty 18 pro $x \in I$ integrál v (23).

Definujme funkci F

$$F(x) = (R) \int_{x_0}^x f(t) \, dt \quad (23)$$

Ve větě 23 jsme ukázali, že pro $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Odtud plyne, že je F primitivní funkce f na intervalu I . $\square$

Newtonův integrál

Definice 30 (Newtonův integrál). Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, necht' jsou funkce f , F definované na intervalu I . Necht' je F primitivní funkce f na I . Necht' existují konečné limity

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$$

Pak říkáme, že je funkce f *Newtonovsky integrovatelná na intervalu I* a *Newtonovým integrálem funkce f na I* nazýváme číslo

$$(N) \int_a^b f(x) \, dx := \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad (24)$$

Hodnotu na pravé straně (24) nazýváme *Newtonovým integrálem* i v případě, že je některá z limit nevlastní a jejich rozdíl je definován.

Příklad 31. Vypočteme $(N) \int_0^4 \sqrt{x} \, dx$.

Příklad 32. Ukážeme, že $f(x) = \frac{1}{x}$ není Newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 2)$.

Příklad 33. Vypočteme $(N) \int_{-1}^2 |x| \, dx$.

Věta 34 (o vlastnostech Newtonova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť jsou funkce f, g definované na I .

Pak platí

- (i) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na intervalu I a nechť $c \in (a, b)$.

Pak je f newtonovsky integrovatelná na intervalech (a, c) , (c, b) a platí

$$(N) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^c f(x) dx + (N) \int_c^b f(x) dx \quad (25)$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru*.

- (ii) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na I . Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \geq 0.$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (26)$$

Tuto vlastnost nazýváme *pozitivitou newtonova integrálu*.

- (iii) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I . Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pak je funkce $h = \alpha f + \beta g$ newtonovsky integrovatelná na I a platí (na pravé straně jsme pro větší přehlednost vynechali značku (N))

$$(N) \int_a^b h(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Tuto vlastnost nazýváme *linearitou newtonova integrálu*.

- (iv) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I . Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x) dx \leq (N) \int_a^b g(x) dx \quad (27)$$

Tuto vlastnost nazýváme *monotonií newtonova integrálu*.

Důkaz.

Věta 35 důležitá (Newton – Leibniz). Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Necht' je funkce f spojitá na intervalu I .

Pak je f riemannovsky integrovatelná na I , newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí

$$(N) \int_a^b f(x) \, dx = (R) \int_a^b f(x) \, dx \quad (28)$$

Důkaz. Protože je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I , je na něm podle věty 15 riemannovsky integrovatelná.

Zvolme $c \in (a, b)$. Pak je dle věty 29 funkce F primitivní k f na intervalu (a, b)

$$F(x) = (R) \int_c^x f(t) \, dt$$

Definujme dále pro $x \in (a, b)$

$$R(x) = (R) \int_a^x f(t) \, dt$$

Z aditivity Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 16, (i)) plyne

$$(R) \int_c^x f(t) \, dt = (R) \int_c^a f(t) \, dt + (R) \int_a^x f(t) \, dt$$

Odtud dosazením z definice funkcí F , R dostaneme

$$F(x) = (R) \int_c^a f(t) \, dt + R(x)$$

Z limit v lemma 24 plyne (člen s integrálem je konstantní – nezávisí na proměnné x)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) &= (R) \int_c^a f(t) \, dt \\ \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) &= (R) \int_c^a f(t) \, dt + (R) \int_a^b f(t) \, dt \end{aligned}$$

Odtud plyne, že je f newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí rovnost (28). $\square$

Příklady 36.

1. Vypočteme integrál $(N) \int_{-1}^2 |x| dx$.

Protože je funkce $f(x) = |x|$ spojitá na intervalu $I = [-1, 2]$, je dle Newton-Leibnizovy věty na intervalu I newtonovsky integrovatelná. Můžeme tedy použít aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 34 (i)).

Odtud plyne

$$(N) \int_{-1}^2 |x| dx = (N) \int_{-1}^0 |x| dx + (N) \int_0^2 |x| dx$$

V těchto integrálech lze odstranit absolutní hodnotu a další výpočet necháme na čtenáři.

2. Vypočteme integrál $(N) \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin^2(x)} dx$.

Po úpravě dostaneme $(N) \int_0^\pi |\cos(x)| dx$.

Použijeme aditivitu integrálu, poté v integrálech odstraníme absolutní hodnotu a mínus vytkneme před integrál

$$(N) \int_0^\pi |\cos(x)| dx = (N) \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx - (N) \int_{\pi/2}^\pi \cos(x) dx$$

Výpočtem pak dostaneme

$$(N) \int_0^\pi |\cos(x)| dx = 2.$$

Aplikace integrálů

Je k dispozici text k aplikacím na
https://kma.fp.tul.cz/~simunkova/analyza/an2-2017-18/aplikace_integralu.pdf

Video zatím z důvodu nedostatku času není natočeno.

Integrální kritérium konvergence řad

V této kapitole vyložíme integrální kritérium konvergence řad. Zahájíme zkoumáním konvergence řad (29) – (32). Jejich součet převedeme na integrál a konvergenci zjistíme potom výpočtem integrálu (věta 42).

Pro snadnější formulaci důkazu se nám bude hodit pojem celá část z reálného čísla. Jde v podstatě o zaokrouhlení na nejbližší menší celé číslo, jak je vidět z následující definice.

Definice 37. Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Celou částí čísla* x nazveme číslo $\lfloor x \rfloor$ splňující

- (i) $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
- (ii) $\lfloor x \rfloor \leq x$
- (iii) $\lfloor x \rfloor + 1 > x$

Motivace 38.

Chceme zjistit, zda konvergují řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{32}$$

Řada (29) nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \neq 0$$

proto nekonverguje.

Ostatní řady nutnou podmínku konvergence splňují

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

Odtud ale nic neplyne pro konvergenci těchto řad.

Protože mají tyto řady kladné členy, mají všechny součty a jde jen o to určit, zda je tento součet konečný.

Pomocí funkcí $f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$ vyjádříme členy řad (30) – (32) ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Číslo $f(k)$ napíšeme pomocí integrálu z konstantní funkce $x \mapsto f(k)$ přes interval délky jedna (kreslete obrázek)

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k) \, dx$$

Číslo k nahradíme na pravé straně pro $x \in [k, k+1)$ celou částí čísla $\lfloor x \rfloor$. Dostaneme

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(\lfloor x \rfloor) \, dx$$

Pomocí integrálu pak vyjádříme částečný součet řady

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(\lfloor x \rfloor) \, dx = \int_1^{n+1} f(\lfloor x \rfloor) \, dx \quad (33)$$

Při úpravě jsme využili aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

Integrál v (33) neumíme vyčíslit, proto ho odhadneme. Využijeme toho, že jsou funkce f klesající na intervalu $(0, \infty)$. Protože platí $\lfloor x \rfloor \leq x$, plyne odtud $f(\lfloor x \rfloor) \geq f(x)$. Z monotonie integrálu pak plyne

$$\int_1^{n+1} f(\lfloor x \rfloor) \, dx \geq \int_1^{n+1} f(x) \, dx$$

Levou stranu nahradíme z (33) částečným součtem

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) \, dx$$

a limitním přechodem v nerovnosti pak dostaneme odhad pro součet nekonečné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) \, dx$$

Spočítáme hodnotu výrazu na pravé straně nerovnosti a pokud vyjde nekonečná, plyne odtud, že i levá strana je rovna nekonečnu a tedy řada na levé straně nekonverguje.

Pokud je hodnota pravé strany konečná, neplyne odtud nic. Podobnými úvahami (podrobnosti ve cvičení 39) odvodíme

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) \, dx \quad (34)$$

a odtud plyne z konečnosti pravé strany konečnost levé strany a tedy konvergence řady.

Cvícení 39.

1. Ukažte, že pro funkci f klesající na intervalu $(0, \infty)$ a pro $x > 1$ platí $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$ a $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x - 1)$
2. Ukažte, že pro funkci f klesající na intervalu $(0, \infty)$ platí

$$\int_2^{n+1} f(\lfloor x \rfloor) \, dx \leq \int_2^{n+1} f(x - 1) \, dx$$

3. Ukažte, že platí

$$\int_2^{n+1} f(x - 1) \, dx = \int_1^n f(x) \, dx$$

4. Z předchozích cvičení odvoďte (34).

Poznámka 40. Limitu v (34) a dalších vztazích nahradíme integrálem přes neomezený interval

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) \, dx = \int_1^{\infty} f(x) \, dx \quad (35)$$

Tento vztah plyne v případě Newtonova integrálu přímo z definice Newtonova integrálu.

V případě Riemannova integrálu je definován jen integrál na levé straně. Integrál na pravé straně nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem* a vztah (35) je definicí tohoto nevlastního Riemannova integrálu.

Příklady 41.

1. Výpočtem integrálů

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \infty$$

zjistíme součty řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

2. Výpočtem integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

dostaneme pomocí (34) konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Navíc ze vztahu (34) dostaneme

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ je možné sečíst prostředky, které jsou mimo možnosti tohoto textu. Součet je roven $\pi^2/6$, což souhlasí s naším výpočtem.

Věta 42 (integrální kritérium konvergence řad). Nechť je funkce f nerostoucí na intervalu $[1, \infty)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ je konvergentní.
- (ii) Integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ má konečnou hodnotu.

Hlavní myšlenky důkazu. Nejdříve je třeba ukázat, že integrál v (ii) existuje. Spokojme se s konstatováním, že existence nevlastního Riemannova

integrálu plyne z Riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce a z existence jednostranné limity monotonní funkce.

Newtonův integrál neexistuje v námi definované verzi, pokud není funkce f na intervalu $[1, \infty)$ spojitá. Existuje v zobecněné verzi, kde místo primitivní funkce použijeme tzv. zobecněnou primitivní funkci, u které se v konečném počtu bodů místo diferencovatelnosti spokojíme se spojitostí.

Důkaz těchto tvrzení přesahuje rámec tohoto textu.

Další kroky důkazu jsou analogiemi úvah výše v motivačních příkladech 38 a cvičení 39.

Příklad 43. Určíme, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a$$

Pro $a > 0$ je $\lim_{k \rightarrow \infty} k^a = \infty$, není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy nekonverguje.

Pro $a = 0$ je $\lim_{k \rightarrow \infty} k^a = 1$, opět tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy nekonverguje.

Pro $a < 0$ je $\lim_{k \rightarrow \infty} k^a = 0$ a je tedy splněna nutná podmínka konvergence. K určení konvergence řady použijeme větu 42.

Výpočtem primitivní funkce pro $a \neq -1$ dostaneme

$$\int_1^{\infty} x^a dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{a+1}}{a+1} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

Pro $a \in (-1, 0)$ je $a+1 > 0$, proto je limita v nekonečnu rovna nekonečnu a tedy řada pro tato a nekonverguje.

Případ $a = 1$ jsme vyřešili výše v motivaci 38.

Pro $a < -1$ je $a+1 < 0$, proto je limita v nekonečnu rovna nule a tedy řada pro tato a konverguje.

Závěrem konstatujme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^a$ konverguje právě když je $a < -1$.

Častěji se s touto řadou setkáme v jiném tvaru, ten probereme v následujícím cvičení.

Cvičení 44. Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$