Písemná část zkoušky z AN2

7. června 2025

1. Určete definiční obor a obor hodnot funkce f.

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

1*

$$f(x) = \frac{\exp(1/x)}{\exp(1/x) + \exp(2/x) + \exp(3/x)}$$

2. Pro funkce f, g určete definiční obor a body, v nichž má funkce odstranitelnou nespojitost

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

2*

$$f(x) = \log|\operatorname{arctg}(1/x)| \qquad g(x) = \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

3. (a) Určete, zda následující řady splňují nutnou podmínku konvergence. Co odtud plyne pro konvergenci řady?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3+4k-8}+2k}{k^2+k-7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k-7}{\sqrt{k^3+4k-8}+2k}$$

   (b) Vypočtěte součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{3^{2k+1}}$

3* (a) jako u úlohy 3, v (b) vypočtěte součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4^k}{3^{2k+1}} - \frac{1}{2^k}\right)$$

4. Obrazec M leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.

$$f(x) = (4-x)\exp(x/2)$$

4* Navíc vypočtěte maximum funkce f na intervalu $[0, \infty)$ a použijte ho k hornímu odhadu objemu tělesa, kdy těleso nahradíte vhodným válcem.

Poté zlepšete svůj odhad objemu tělesa nahrazením tělesa jedním případně dvěma kužely.

Při výpočtu použijte $e \doteq 3$.

5. Vypočtěte určitý integrál.

$$\int_0^1 \sqrt{(1-2x)^6}\,\mathrm{d}x$$

5*

$$\int_0^1 \sqrt{(1-2x)^{18}}\,\mathrm{d}x$$