Písemná část zkoušky z AN2

26. června 2025

1. Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí

$$f(x) = 3\sin(x) - \cos^2(x)$$

1*

$$f(x) = (3\sin(x) - \cos^2(x))^5$$

2. Pro funkce f, g určete definiční obor a body, v nichž má funkce odstranitelnou nespojitost

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad g(x) = \frac{\log(x^2)}{x+1}$$

2*

$$f(x) = \log(x^2+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{(1+x)^3}{(1-x)^4}\right) \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x+2}\log(x^2)}{x+1}$$

3. Zvolte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, že $a < b < c$. Čísla α, β, γ zvolte libovolná kladná, ale *ne všechna stejná*.

   Načrtněte graf funkce f, který je sjednocením úseček AB, BC, kde $A = [a, \alpha]$, $B = [b, \beta]$, $C = [c, \gamma]$.

   Pro $t \in (a, c]$ vypočtěte obsah $S(t)$ mnohoúhelníka $M(t)$, kde je obsah obrazce pod grafem f nad intervalem $[a, t]$, formálně zapsáno

$$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, t], y \in [0, f(x)]\}$$

   K výpočtu použijte prostředky elementární geometrie.

   Načrtněte graf funkce S a výsledek zkontrolujte výpočtem derivace S' a náčrtkem grafu této derivace.

3* Zvolte α, β, γ dle úlohy 3. Určete jednostranné derivace funkcí S, f v bodě b a svůj závěr zdůvodněte.

4. Nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g a udělejte zkoušku.

   Pro každou z primitivních funkcí zvolte otevřený a maximální možný interval (tj. takový, který nemůžete zvětšit). Je-li takových intervalů možných více, zvolte kterýkoliv z nich.

$$f(x) = x^2\sin(x), \qquad g(x) = 6x\sqrt{x^2+2}$$

4*

$$f(x) = x \sin^2(x), \qquad g(x) = 2x^3\sqrt{x^2+2}$$

5. Vypočtěte určitý integrál.

$$\int_0^1 \sqrt{(1-2x)^6}\,\mathrm{d}x$$

5*

$$\int_0^1 \sqrt{(1-2x)^{18}}\,\mathrm{d}x$$