1. Vypočtěte dolní a horní integrální součet pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $I = [0, 2]$ pro dělení
$$D_n : x_i = 2i/n, \text{ pro } i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$
Dále vypočtěte
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} DIS(f, D_n), \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} HIS(f, D_n)$$

2. Dokončete předchozí úlohu:

   Využijte vzorce (Štěpánka má za úkol vysvětlit proč platí)
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} DIS(f, D_n) \le \sup_{D \text{ dělení } I} DIS(f, D)$$
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} HIS(f, D_n) \ge \inf_{D \text{ dělení } I} HIS(f, D)$$
k odhadu dolního, horního a Riemannova integrálu funkce f na I.

3. Ukažte, že pokud pro $x \in [0, \infty)$ platí
$$(\forall \varepsilon > 0)(x < \varepsilon),$$
pak je $x = 0$.

4. Ukažte, že pro funkci f omezenou na intervalu $I = [a, b]$ a dělení D intervalu I platí[1]
$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le HIS(f, D)$$
$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \ge DIS(f, D)$$

5. Na přednášce jsme odvodili, že pro funkci spojitou na $I = [a, b]$ a $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I takové, že platí
$$HIS(f, D) - DIS(f, D) \le \varepsilon(b - a)$$
Odvoďte odtud, že platí[2]
$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon(b - a)$$

6. Na přednášce jsme zformulovali aditivitu Riemannova integrálu pro $a < b < c$
$$(R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
Ukažte, že tato vlastnost platí pro každou trojici $a, b, c \in \mathbb{R}$.

[1] Připomeňte si, že supremum množiny je její horní závora a infimum množiny je její dolní závora.
[2] Použijte definici horního a dolního iRiemannova integrálu a poznámku 1.