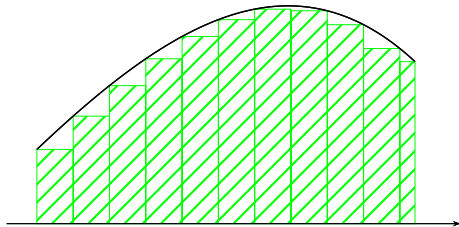


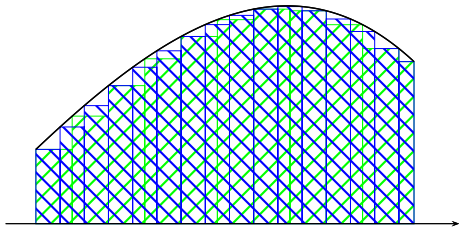
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



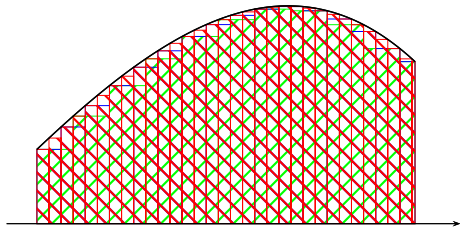
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



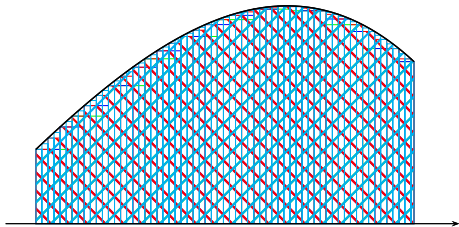
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



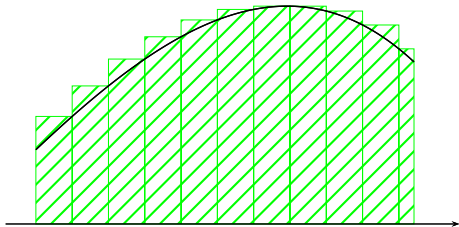
Dolní Riemannův integrál je definován jako supremum dolních součtů

$$I_d(f, a, b) = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



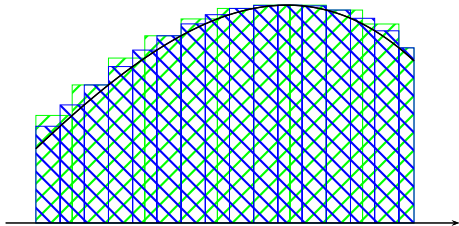
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



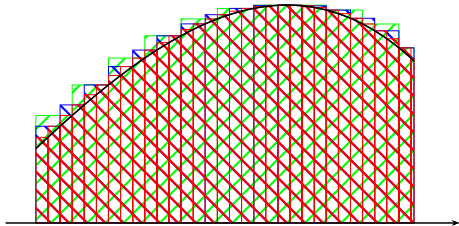
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



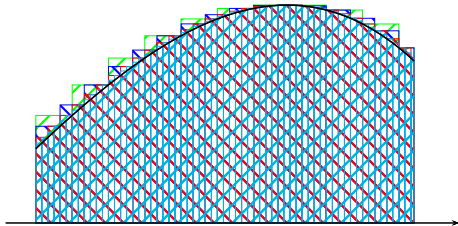
Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



Horní Riemannův integrál jako infimum horních součtů

$$I_h(f, a, b) = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}$$



Ukážeme, že $I_d(f, a, b) \leq I_h(f, a, b)$ (a zopakujeme si pojmy suprema a infima):

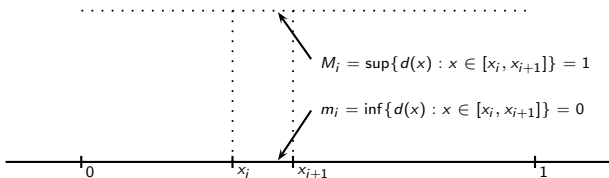
Ukázali jsme, že pro libovolná dvě dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ platí $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$. Proto je $s(f, D_1)$ dolní hranicí množiny horních součtů. Protože $I_h(f, a, b)$ je největší dolní hranicí množiny horních součtů, je $s(f, D_1) \leq I_h(f, a, b)$.

Protože tato nerovnost platí pro všechny dolní součty, je $I_h(f, a, b)$ horní hranicí množiny dolních součtů, a protože je $I_d(f, a, b)$ nejmenší horní hranicí množiny dolních součtů, je $I_d(f, a, b) \leq I_h(f, a, b)$.

Příklad funkce d (Dirichletova funkce), pro kterou je $I_d(d, 0, 1) < I_h(d, 0, 1)$:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Každý neprázdný interval obsahuje racionální i iracionální číslo, proto je $m_i = 0$, $M_i = 1$ pro všechna i



a odtud plyne $s(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i = 0$ a

$S(f, D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$ pro libovolné dělení D intervalu $[0, 1]$.

Definice Riemannova integrálu

Funkci f definovanou a omezenou na intervalu $[a, b]$ nazveme *Riemannovsky integrovatelnou*, pokud se rovnají dolní a horní Riemannův integrál funkce f přes interval $[a, b]$, formálně zapsáno, pokud platí

$$I_d(f, a, b) = I_h(f, a, b).$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme *Riemannovým integrálem funkce f přes interval $[a, b]$* , značíme jej $(R) \int_a^b f(x) dx$, někdy též $(R) \int_a^b f$ a pokud nehrozí záměna, tak $\int_a^b f(x) dx$ či též $\int_a^b f$.