

Druhy nespojitosti funkcí

Pro pochopení chování funkcí v okolí problematických bodů je pro budoucí učitele matematiky klíčové umět nespojitosti nejen identifikovat, ale také je správně klasifikovat. Nespojitosti obvykle dělíme na odstranitelné, nespojitosti prvního druhu (typu skok) a nespojitosti druhého druhu.

Předpokládejme, že funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definice 1 (Odstranitelná nespojitost). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **odstranitelnou nespojitost**, jestliže existuje vlastní (konečná) oboustranná limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R},$$

ale funkce f buď není v bodě x_0 definována, nebo platí $f(x_0) \neq L$.

Poznámka: Nespojitost se nazývá odstranitelná, protože funkci lze v bodě x_0 spojitě dodefinovat (nebo předefinovat) hodnotou L .

Definice 2 (Nespojitost typu skok (1. druhu)). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **nespojitost typu skok** (nebo též nespojitost prvního druhu), jestliže existují obě vlastní jednostranné limity, ale jsou různé. Tedy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2 \in \mathbb{R},$$

přičemž $L_1 \neq L_2$. Rozdíl $|L_2 - L_1|$ se nazývá *skok funkce* v bodě x_0 .

Definice 3 (Nespojitost 2. druhu). Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **nespojitost druhého druhu** (nebo též podstatnou nespojitost), jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v bodě x_0 neexistuje, nebo je nevlastní (tj. rovna $+\infty$ nebo $-\infty$).

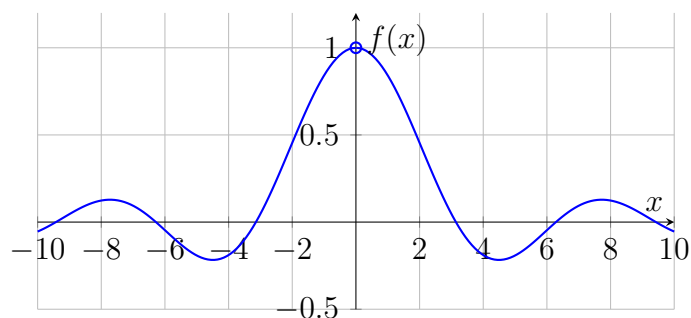
Příklady nespojitostí v bodě $x_0 = 0$

1. Odstranitelná nespojitost

Příklad 1 (Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$). Tato funkce není v bodě $x_0 = 0$ definována. Z nástrojů matematické analýzy však víme, že platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Jelikož vlastní oboustranná limita existuje, jedná se o **odstranitelnou nespojitost**. Pokud bychom dodefinovali $f(0) = 1$, stala by se funkce spojitou na celém $\mathbb{R}$.

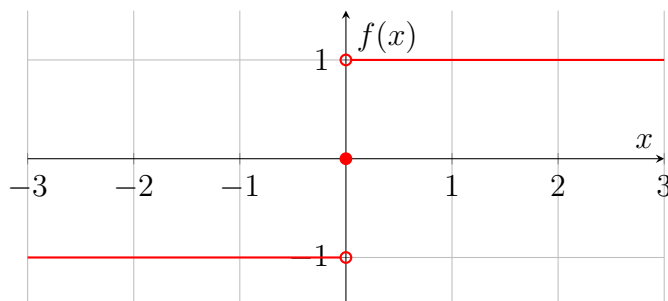


2. Nespojitost typu skok (1. druhu)

Příklad 2 (Signum: $f(x) = \text{sgn}(x)$). Funkce signum vrací -1 pro záporná čísla, 0 pro nulu a 1 pro kladná čísla. Zkoumejme jednostranné limity v bodě $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1.$$

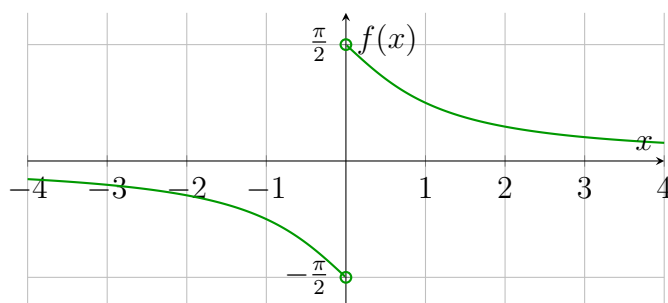
Jednostranné limity jsou vlastní, ale nerovnájí se. Jedná se o **nespojitost typu skok** o velikosti $|1 - (-1)| = 2$.



Příklad 3 (Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$). Tato složená funkce není definována v nule. Vnitřní funkce má v nule nevlastní limity. Využitím věty o limitě složené funkce získáme:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Obě jednostranné limity jsou konečné, avšak různé. I zde jde o **nespojitosť typu skok**. Skok je roven π .

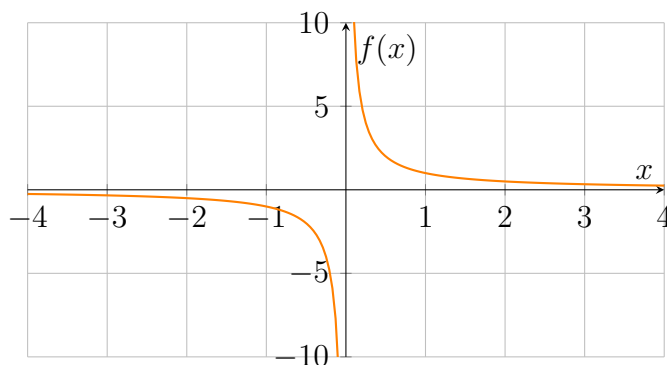


3. Nespojitosť 2. druhu

Příklad 4 (Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$). Tato racionální lomená funkce není v nule definována. Vypočítáme-li jednostranné limity, zjistíme, že utíkají do nekonečna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

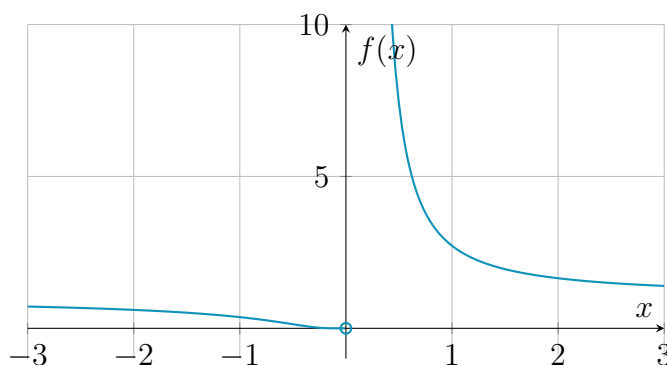
Protože jsou obě jednostranné limity nevlastní, jedná se o **nespojitosť 2. druhu**.



Příklad 5 (Funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$). Tato exponenciální funkce se složeným argumentem rovněž není v nule definována. Při výpočtu jednostranných limit zjistíme, že chování zleva a zprava je zcela odlišné:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

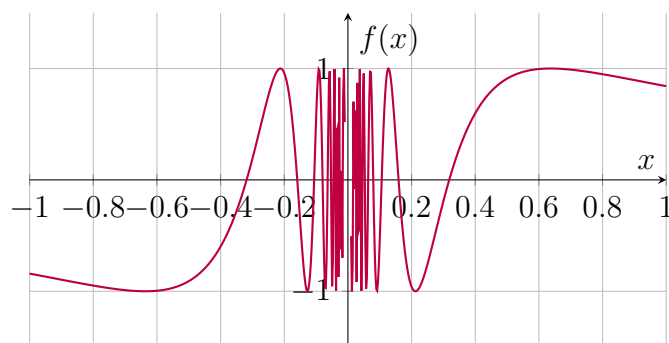
Zatímco zleva se funkce limitně blíží k nule, zprava roste nade všechny meze. Protože je pravostranná limita nevlastní, jde opět o **nespojitosť 2. druhu**.



Příklad 6 („Topologická sinusovka“: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$). Tato funkce ukazuje patologické chování v okolí nuly. Když se x blíží k nule, argument $\frac{1}{x}$ roste nade všechny meze a funkce neustále osciluje mezi hodnotami -1 a 1 .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ neexistuje (a neexistují ani limity jednostranné).}$$

Protože jednostranné limity v bodě vůbec neexistují, jde také o **nespojitosť 2. druhu**.



Poznámky a úlohy k zamyšlení: Prozkoumáme graf funkce $f(x) = \sin(1/x)$.

1. Určete v kterých bodech má funkce f kořeny.
2. Určete v kterých bodech nabývá funkce f hodnoty jedna a v kterých hodnoty mínus jedna.
3. Určete v kterých bodech nabývá funkce f hodnoty jedna a v kterých hodnoty mínus jedna.
4. Všimněte si „zubatosti“ grafu funkce f výše a uvědomte si, že to odporuje zjištěním v předchozích bodech.
- 4* Jev, který jsme vypořadovali v bodě 3, vznikl způsobem, kterým software vykresluje graf – zjistěte, v čem je chyba a jak by ji bylo možné opravit.