

Exponenciální a logaritmické funkce

Materiál pro studenty učitelství matematiky

1 Definice exponenciály (exponenciální funkce s Eulerovým číslem jako základem)

Pro mocniny s přirozeným exponentem platí následující vlastnost:

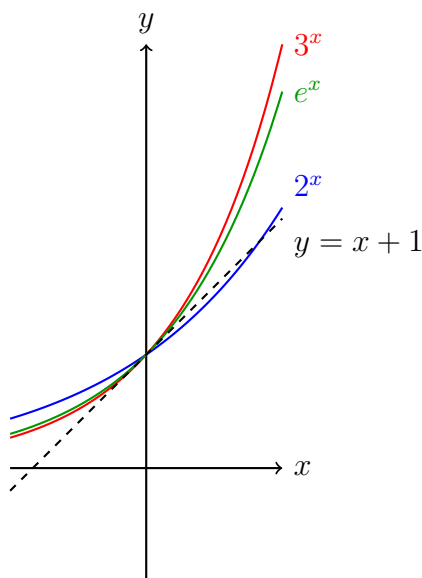
$$\forall a \in \mathbb{R} \forall n, m \in \mathbb{N} : a^{n+m} = a^n a^m \quad (1)$$

Mocniny s reálným exponentem jsou následně definované požadavkem zobecnění této vlastnosti právě na reálné exponenty. Chceme tedy, aby pro $a \in \mathbb{R}$ platilo:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : a^{x+y} = a^x a^y \quad (2)$$

Poznámka 1. Přidáme-li přirozenou podmínku $a^1 = a$, není možné (2) splnit pro záporné a , jak se můžete přesvědčit dosazením $x = y = 1/2$. Dostaneme $a^1 = (a^{1/2})^2$, které je nezáporné.

Níže uvádíme graf exponenciálních funkcí se základy 2, 3 a Eulerovým číslem $e \doteq 2.7$ spolu s přímkou $y = x + 1$.



Z grafu je patrné, že přímkou $y = x + 1$ je sečnou grafu $y = 2^x$, méně je vidět, že je sečnou i grafu $y = 3^x$ a tečnou ke grafu exponenciály o základu e .

Znamená to, že funkce $f(x) = e^x$ má v bodě nula derivaci rovnu jedné, tj.

$$(e^x)'_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Dvě výše uvedené vlastnosti (zobecnění umocňování a hodnota směrnice tečny) nás přivádějí k samotné definici exponenciály.

Než napíšeme definici, zformulujeme větu o existenci takové funkce, větu nebudeme dokazovat, hlavní myšlenky důkazu uvedeme v ZÁVĚRU TEXTU, poté, co z axiomů odvodíme vlastnosti exponenciální funkce.

Věta 2 (O existenci exponenciální funkce). *Existuje právě jedna funkce (kterou budeme značit $\exp$), splňující následující dva axiomy:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

Definice 3. Exponenciální funkcí nazýváme funkci $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která splňuje axiomy z předchozí věty.

2 Vlastnosti exponenciální funkce

Zformulujme základní vlastnosti exponenciální funkce, které v další kapitole dokážeme z axiomů.

Věta 4. *Nechť funkce f splňuje axiomy z věty 2. Pak platí*

1. *Derivace exponenciální funkce je $\exp' = \exp$ na $\mathbb{R}$. Jinak řečeno*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp'(x) = \exp(x)$$

2. *$\exp$ je funkce spojitá na $\mathbb{R}$*
3. *$\exp$ je na $\mathbb{R}$ nezáporná, tj. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \geq 0$*
4. *$\exp$ je na $\mathbb{R}$ kladná, tj. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$*
5. *$\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$, tj.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$$

6. $\exp(0) = 1$

7. Funkce $f(x) = \exp(x) - x$ je klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, \infty)$
8. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) \geq x + 1$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$
10. $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = 1/\exp(x)$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
12. Obor hodnot exponenciální funkce je interval $(0, \infty)$, tj.

$$\{\exp(x) | x \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

3 Důkazy vlastností exponenciály

Důkaz věty 4.

1. Derivaci odvodíme přímo z definice:

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h}$$

S použitím prvního axiomu upravíme čítec:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x) \exp(h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h}$$

Výraz $\exp(x)$ nezávisí na h , můžeme tedy vytknout před limitu (použijeme větu o aritmetice limit) a aplikovat druhý axiom:

$$\exp(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x) \cdot 1 = \exp(x)$$

2. Z předchozího bodu víme, že funkce má derivaci v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Připomeňme větu, že z diferencovatelnosti funkce automaticky plyne její spojitost.
3. Nezápornost prokážeme trikem, kdy exponent x vyjádříme ve tvaru $x/2 + x/2$:

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$$

4. Z předchozího bodu víme, že $\exp$ je nezáporná funkce na $\mathbb{R}$. Kladnost dokážeme sporem. Nechť existuje nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $\exp(x_0) = 0$. Pro libovolné reálné x pak platí:

$$\exp(x) = \exp(x - x_0 + x_0) = \exp(x - x_0) \exp(x_0) = \exp(x - x_0) \cdot 0 = 0$$

Z jedné nulové hodnoty by tak nevyhnutelně plynuly i všechny ostatní (funkce by byla konstantní nula). To je ale ve sporu s druhým axiomem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x}$ není rovna jedné.

5. Z bodů 1 a 4 víme, že $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Z věty o monotonii a derivaci pak plyne, že funkce $\exp$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.
6. Vhodně upravíme výraz $\exp(x)$ jako $\exp(x + 0)$ a použijeme první axiom:

$$\exp(x) = \exp(x + 0) = \exp(x) \exp(0)$$

Využijeme nenulovost funkce (bod 4, $\exp(x) \neq 0$), a rovnici vydělíme výrazem $\exp(x)$ a dostaneme $1 = \exp(0)$.

7. Zderivujeme zadanou funkci f : $f'(x) = \exp(x) - 1$. Použijeme fakt, že $\exp(0) = 1$ a vlastnost monotonie funkce $\exp$. Pro $x > 0$ je $\exp(x) > \exp(0) = 1$, tedy $f'(x) > 0$ a funkce roste. Pro $x < 0$ je $\exp(x) < \exp(0) = 1$, tedy $f'(x) < 0$ a funkce klesá.
8. Z předchozího plyne, že funkce $f(x) = \exp(x) - x$ nabývá na $\mathbb{R}$ minimální hodnoty v bodě $x = 0$. Protože $f(0) = \exp(0) - 0 = 1$, plyne odtud pro $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \exp(x) - x \geq f(0) = 1$$

a odtud po úpravě plyne $\exp(x) \geq x + 1$.

9. Z limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + 1 = \infty,$$

předchozího bodu a z věty o sevřené funkci (tady je jen jeden „policajt“, protože dolní funkce má limitu rovnu nekonečnu) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty,$$

10. Do základního axiomu dosadíme a upravíme výraz $\exp(x - x)$:

$$\exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$$

Protože $\exp(0) = 1$, platí $1 = \exp(x) \exp(-x)$, odkud vydělením získáme

$$\exp(-x) = 1 / \exp(x)$$

11. Aplikujeme větu o limitě složené funkce a větou o aritmetice limit:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(t)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

12. Ze spojitosti funkce plyne vlastnost nabývání mezhodnot. Zároveň z věty o limitě monotonní funkce víme, že limity rostoucí funkce jsou rovny supremu a infimu oboru hodnot H

$$\inf H = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$$
$$\sup H = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$$

Obě limity jsme spočítali výše a odtud je obor hodnot $H = (0, \infty)$.

□

4 Logaritmus

Z vlastností exponenciální funkce plyne následující tvrzení, které nám následně umožní definovat logaritmus jako funkci inverzní k exponenciále.

Věta 5 (O logaritmu). *Rovnice $y = \exp(x)$ má pro $y > 0$ právě jedno řešení a pro $y \leq 0$ nemá žádné řešení.*

Důkaz. Existence řešení pro $y > 0$ plyne z vlastnosti 12 exponenciální funkce.

Sporem dokážeme, že je kořen jen jeden. Nechtě x_1, x_2 jsou dva různé kořeny rovnice $\exp(x) = y$. Pak je buď $x_1 < x_2$ nebo $x_1 > x_2$ a odtud a z monotonie funkce $\exp$ plyne $\exp(x_1) \neq \exp(x_2)$, což je spor s $\exp(x_1) = y = \exp(x_2)$. □

Definice 6 (Logaritmus). Logaritmem nazýváme funkci, která číslu $x \in (0, \infty)$ přiřadí číslo y , které je kořenem rovnice a značíme ho $y = \log(x)$

$$\exp(y) = x$$

5 Vlastnosti logaritmu

Věta 7. *Funkce logaritmus splňuje*

1. *Definiční obor logaritmu je interval $(0, \infty)$.*
2. *Obor hodnot je množina $\mathbb{R}$.*

3. *Monotonie: Logaritmus je rostoucí na svém definičním oboru.*
4. *Limita v nule zprava: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$.*
5. *Limita v nekonečnu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x) = \infty$.*
6. *Logaritmus součinu: $\forall x, y \in \mathbb{R} : \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$.*
7. *Logaritmus podílu: $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0 : \log(x/y) = \log(x) - \log(y)$.*
8. *Logaritmus mocniny*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall a \in (0, \infty) : \log(a^n) = n \log(a)$$
9. *Logaritmus jedné: $\log(1) = 0$.*
10. *Derivace v bodě 1: Výpočet vede na limitu $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1}$ a tato limita je rovna jedné.*
11. *Derivace logaritmu: $\log'(x) = 1/x$.*

6 Důkazy vlastností logaritmu

Důkaz. věty 7

1. Definiční obor inverzní funkce odpovídá oboru hodnot výchozí funkce. Obor hodnot $\exp$ je $(0, \infty)$, proto je definičním oborem logaritmu interval $(0, \infty)$.
2. Obor hodnot inverzní funkce odpovídá definičnímu oboru výchozí funkce, což je u $\exp$ množina $\mathbb{R}$.
3. Inverzní funkce k rostoucí funkci je rovněž rostoucí. Plyne z nutné a postačující podmínky pro funkci rostoucí na intervalu I

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 : (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0$$

po substituci $\exp(x_k) = y_k, x_k = \log(y_k)$ pro $k = 1; 2$.

4. Protože jsou exponenciální a logaritmická funkce vzájemně inverzní, platí

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(\exp(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Substitucí $y = \exp(x)$ dostaneme limitu (exponenciální funkce je rostoucí, proto v okolí $-\infty$ je $y = \exp(x) > 0$ a dostaneme limitu zprava

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(y) = -\infty$$

5. Analogicky jako v předchozím bodě platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(\exp(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

a substitucí $y = \exp(x)$ dostaneme limitu

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \log(y) = \infty$$

6. Označme pro $x, y \in \mathbb{R}$

$$a = \log(x), \quad b = \log(y)$$

Pak je $x = \log(a)$, $y = \log(b)$ a z axiomu pro exponenciální funkci dostaneme

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

Dosazením dostaneme

$$\exp(\log(x) + \log(y)) = xy$$

a odtud a z definice logaritmu dostaneme

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy)$$

7. Pravidlo pro derivaci podílu je přímým důsledkem pravidla pro derivaci součtu. Pro $y \neq 0$ platí

$$\log(x/y) + \log(y) = \log(x/y \cdot y) = \log(x)$$

odkud odečtením výrazu $\log(x)$ od obou stran rovnice dostaneme

$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$

8. Dokážeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí: $\log(a^1) = 1 \cdot \log(a)$.

Indukční krok: upravíme a použijeme pravidlo pro logaritmus součinu

$$\log(a^{n+1}) = \log(a^n a) = \log(a^n) + \log(a)$$

Nyní použijeme k úpravě indukční předpoklad pro n a na závěr vytkneme $\log(a)$

$$\log(a^n) + \log(a) = n \log(a) + \log(a) = (n + 1) \log(a)$$

Ukázali jsme, že platí

$$\log(a^{n+1}) = (n + 1) \log(a)$$

9. Z $\exp(0) = 1$ a z definice logaritmu plyne $\log(1) = 0$.
10. Definice derivace pro funkci logaritmus v bodě jedna vede na limitu

$$\log'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x) - \log(1)}{x - 1}$$

Tuto limitu substitucí $y = \log(x)$ a převedeme na limitu

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\exp(y) - 1}$$

kterou spočítáme s použitím věty o aritmetice limit a druhého axiomu pro exponenciální funkci

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\exp(y) - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\exp(y)-1}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\exp(y)-1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

11. Derivaci funkce logaritmus odvodíme dvěma způsoby. Jednak přímo z definice a za druhé použijeme větu o derivaci složené funkce.

(a) Výpočet z definice

$$\log'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

Použijeme pravidlo pro logaritmus podílu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h}$$

Zvolíme substituci $t = \frac{h}{x}$ (odtud $h = tx$) a dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{tx}$$

kde po vytknutí konstantního x (tj. nezávislého na proměnné t) dostaneme použitím věty o aritmetice limit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{tx} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

- (b) Nechť $y = \log(x)$, pak $x = \exp(y)$. Z pravidla pro derivaci inverzní funkce plyne

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}$$

□

7 Exponenciální funkce s obecným základem

Pro přirozená čísla n a pro $a \in (0, \infty)$ platí

$$a^n = \exp(\log(a^n)) = \exp(n \log(a))$$

Podobně, jako jsme exponenciální funkci definovali rozšířením platnosti vztahu (1) na reálná čísla, budeme i zde definovat mocninovou funkci s kladným základem a .

Definice 8. Pro $a \in (0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := \exp(x \log(a))$$

Následující věta uvádí vlastnosti funkce $f_a(x) = a^x$.

Věta 9. *Nechť $a \in (0, \infty)$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná na $\mathbb{R}$ vztahem $f(x) = a^x$.*

Pak platí

1. *f je diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a platí*

$$f'(x) = a^x \log(a)$$

2. *Pro $a > 1$ je f rostoucí na $\mathbb{R}$, pro $a < 1$ je f klesající na $\mathbb{R}$ a pro $a = 1$ je f konstantní funkce $f(x) = 1$.*

3. *Pro $a \neq 0$ má f inverzní funkci g*

$$g(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

Funkce g je diferencovatelná na $\mathbb{R}$ a platí

$$g'(x) = \frac{1}{x \log(a)}$$

Důkaz. Necháme čtenáři za cvičení. □

8 Taylorův polynom

BUDE DOPLNĚNO

9 Taylorův polynom exponenciální funkce

BUDE DOPLNĚNO

10 Důkaz věty 2

Uvedeme pouze hlavní myšlenky důkazu. Výše jsme z axiomů odvodili Taylorův polynom exponenciální funkce

$$T_{\exp, n, x_0=0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Pomocí Lagrangeova tvaru zbytku Taylorova polynomu¹ se dá ukázat, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x) = T(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (3)$$

Tím máme ukázáno, že existuje maximálně jedna funkce splňující axiomy věty.

K dokončení důkazu je třeba ukázat, že funkce T definovaná vztahem (3) vyhovuje axiomům věty.

¹Lagrangeův tvar zbytku je zobecněním Lagrangeovy věty o střední hodnotě.