Integrály

Martina Šimůnková ve spolupráci s LLM Gemini

27. března 2026

Obsah

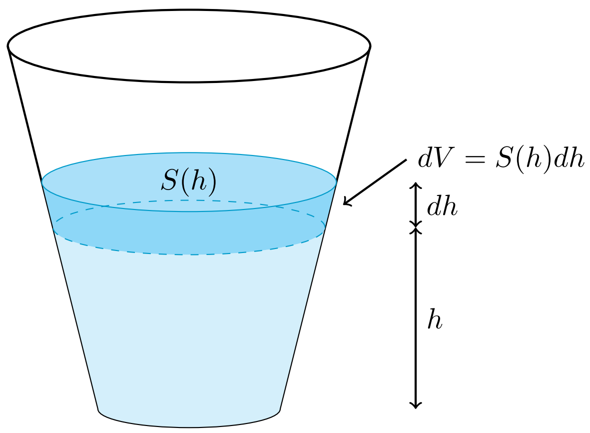
Kapitola 1

Motivace a první definice

V předchozím studiu jsme se naučili zkoumat funkce pomocí derivací. Zjišťovali jsme, jak rychle se veličiny mění. Nyní se podíváme na obrácený problém: Pokud známe rychlost změny, jak určíme celkový stav veličiny? Tento proces „skládání“ malých příspěvků v celek nazýváme integrací.

1.1 Geometrická intuice: Objem a obsah hladiny

Představme si nádobu ve tvaru komolého kuželu (např. vázu). Nechť R je poloměr horní podstavy, r poloměr dolní podstavy a H celková výška vázy. Pokud do vázy naléváme vodu, její objem V je funkcí výšky hladiny $h \in [0, H]$. Z fyzikálního i geometrického pohledu platí fundamentální vztah[1] spojující přírůstek objemu dV, přírůstek výšky dh a obsah hladiny S ve výšce h:



$$dV = S\,dh \tag{1.1}$$

Protože podíl nekonečně malých přírůstků dV/dh je roven derivaci V', dostáváme:

$$V'(h) = S(h) \tag{1.2}$$

Protože je objem V ve výšce hladiny $h = 0$ roven $V(0) = 0$, dostáváme pro objem V podmínky:

$$V'(h) = S(h), \quad V(0) = 0 \tag{1.3}$$

Hledáme tedy funkci V, jejíž derivací je známá funkce plochy hladiny S. Tento úkol nás přivádí k základním pojmům integrálního počtu.

[1] Základní myšlenka spočívá v tom, že pro malý přírůstek výšky Δh platí $\Delta V \approx S(h)\Delta h$. Přesněji $S_{min}\Delta h \leq \Delta V \leq S_{max}\Delta h$, z čehož limitním přechodem $\Delta h \to 0$ a větou o sevření získáme přesnou derivaci objemu.

1.2 Primitivní funkce

V předchozí kapitole jsme při zkoumání objemu nádoby dospěli k problému: známe funkci $S(h)$, která popisuje obsah hladiny, a hledáme funkci objemu V, pro niž platí $V'(h) = S(h)$. Tento proces, tedy „obrácení“ derivování, kdy z rychlosti růstu rekonstruujeme původní veličinu, je ústředním motivem integrálního počtu. Z tohoto důvodu nyní zavedeme formální matematický aparát, který nám umožní takové úlohy systematicky řešit.

Definice (Primitivní funkce, integrovatelná funkce)

Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Funkci F nazveme **primitivní funkcí** k funkci f na I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje derivace $F'(x)$ a platí:

$$F'(x) = f(x) \tag{1.4}$$

Funkci f nazveme **integrovatelnou na intervalu** I, pokud existuje k f na I primitivní funkce.

Jakmile máme k dispozici formální definici, je přirozeným dalším krokem zkoumat, jak primitivní funkce vypadají pro základní elementární funkce. Protože integrace je z definice opačným procesem k derivování, můžeme potřebné vzorce odvodit přímo z našich znalostí diferenciálního počtu.

První vzorec

Z diferenciálního počtu víme, že pro derivaci mocninné funkce platí $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Pokud tento vztah upravíme (pro $n \neq -1$) vydělením konstantou $(n+1)$, dostáváme:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$$

Funkce $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(x) = x^n$.
Platnost tohoto vzorce závisí na definičním oboru mocninné funkce, a tedy na hodnotě n. Pokud je n nezáporné celé číslo ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), vzorec platí na celém intervalu $\mathbb{R}$. Pokud je n celé záporné číslo ($n \leq -2$), platí na dvou disjunktních intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pro obecná reálná n (např. racionální exponenty představující odmocniny) uvažujeme platnost primárně na intervalu $(0, \infty)$.

Výše odvozený vzorec pro mocninné funkce má však jedno zřejmé omezení – nelze jej použít pro případ $n = -1$, neboť by to vedlo k dělení nulou. Z diferenciálního počtu ovšem víme, že derivací logaritmu získáme právě převrácenou hodnotu argumentu. To nás přivádí k řešení tohoto speciálního případu.

Úkol

Ověřte derivováním, že na intervalu $(0, \infty)$ je funkce $F(x) = \ln(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Dále ukažte, že na intervalu $(-\infty, 0)$ je primitivní funkcí k téže funkci f funkce $F(x) = \ln(-x)$. Vysvětlete, proč z těchto dvou faktů vyplývá obvykle uváděný vzorec:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

V definici jsme explicitně zdůraznili, že primitivní funkci uvažujeme na otevřeném intervalu. Následující úkol ilustruje, proč je tato podmínka z hlediska jednoznačnosti výsledku klíčová.

Úkol

Ukažte, že pro funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1/x + 1 & \text{pro } x > 0 \\ 1/x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

a $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $F'(x) = -1/x^2$.

Z předchozího úkolu je zřejmé, že k jedné funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Tyto funkce se od sebe mohou lišit o konstantu. Co je však podstatné pro budoucí učitele: pokud definiční obor není tvořen jedním intervalem, ale sjednocením disjunktních intervalů (jako $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ v našem příkladu), může být tato konstanta na každém intervalu jiná. Na jednom pevném intervalu je však struktura všech primitivních funkcí mnohem jednodušší.

Věta (O jednoznačnosti primitivní funkce)

Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, pak každá jiná primitivní funkce G k funkci f na I má tvar:

$$G(x) = F(x) + C \tag{1.5}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta.

Důkaz. Mějme dvě primitivní funkce F a G k funkci f na intervalu I. Definujme pomocnou funkci $H(x) = G(x) - F(x)$. Pro její derivaci na intervalu I platí:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Zvolme nyní libovolné dva body $x_1, x_2 \in I$, přičemž $x_1 < x_2$. Funkce H je na intervalu $[x_1, x_2]$ spojitá a na (x_1, x_2) má derivaci. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje bod $c \in (x_1, x_2)$ takový, že:

$$H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1)$$

Protože $H'(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, platí i $H'(c) = 0$. Tedy:

$$H(x_2) - H(x_1) = 0 \implies H(x_2) = H(x_1)$$

Funkční hodnota funkce H je pro libovolné dva body intervalu stejná, funkce H je tedy na intervalu I konstantní. Existuje proto $C \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = C$, a tedy $G(x) - F(x) = C$, z čehož plyne $G(x) = F(x) + C$. ■

Značení

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ značíme symbolem neurčitého integrálu:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{1.6}$$

Tento zápis běžně používáme pro vyjádření, že hledáme primitivní funkci, ačkoli zde formálně chybí specifikace intervalu I, na kterém integraci provádíme. Matematicky korektní by bylo vždy interval uvést, avšak z historických a praktických důvodů se v literatuře často vynechává a předpokládá se z kontextu (tj. integrace probíhá na intervalech, kde je funkce definována).
Poznámka k diferenciálu dx: Symbol dx (diferenciál nezávislé proměnné) zde hraje důležitou roli – kromě toho, že formálně uzavírá zápis integrálu, jasně určuje, podle které proměnné se integruje. Jeho vynechávání je častou studentskou chybou. Nicméně tuto chybu je možné tolerovat v případě, že je integrační proměnná jasná z kontextu.
Poznámka k zápisu: V praxi (a často i v tomto textu, pokud půjde jen o mezivýpočet k určitému integrálu) se aditivní konstanta C často vynechává a píšeme zkráceně:

$$\int f(x)\,dx = F(x) \tag{1.7}$$

Budoucí učitel by však měl mít na paměti, že v kontextu hledání všech primitivních funkcí (nebo při řešení diferenciálních rovnic) je vynechání konstanty hrubou chybou.

Nyní, když máme zavedeno formální značení pomocí neurčitého integrálu, můžeme se zaměřit na to, jak integrace zachází se základními algebraickými operacemi, jako je sčítání a násobení.

Věta (Linearita integrálu)

Vlastnostem popsaným níže se souhrnně říká **linearita integrálu**. Protože integrace je procesem inverzním k derivování, přirozeně „dědí“ jeho strukturální vlastnosti. Z didaktického hlediska je linearita klíčová – umožňuje nám rozbít složité integrály na součet jednodušších částí a konstanty, které proces integrace neovlivňují, jednoduše vytknout před znak integrálu.
Pro neurčité integrály tedy platí (na intervalech, kde mají dané výrazy smysl):

- **Integrál součtu a rozdílu:** $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
- **Integrál násobku:** $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$, kde $c \in \mathbb{R}$

Důkaz se opírá přímo o věty o derivaci součtu a násobku. Nechť F je primitivní funkce k f a G je primitivní funkce k g. Chceme ukázat, že $F \pm G$ je primitivní funkcí k $f \pm g$. Zderivujeme pravou stranu hledaného vztahu:

$$(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

Tím je dokázáno pravidlo pro integrál součtu a rozdílu. Analogicky postupujeme pro násobek konstantou c:

$$(c \cdot F(x))' = c \cdot F'(x) = c \cdot f(x)$$

Z definice primitivní funkce a těchto derivací tak přímo plynou obě vlastnosti linearity. Přestože z obou integrálů na pravé straně vzniknou aditivní konstanty, můžeme je vždy sloučit do jediné společné integrační konstanty C. ■

1.3 Řešené úlohy

Teoretické poznatky o linearitě integrálu a znalost vzorců pro integraci mocninných funkcí nyní využijeme v praxi. V následujících úlohách si krok za krokem ukážeme, jak tento aparát aplikovat.

1. Vypočtěte $\int (4x^3 - 2x + 5)\,dx$.
   Řešení: Použijeme pravidlo pro součet/rozdíl a násobek:

$$\int (4x^3 - 2x + 5)\,dx = 4\int x^3\,dx - 2\int x^1\,dx + 5\int x^0\,dx =$$
$$= 4\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 5x + C = x^4 - x^2 + 5x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

2. Vypočtěte $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)\,dx$.
   Řešení: Převedeme odmocniny a zlomky na mocniny ($x^{1/2}$ a x^{-2}) a aplikujeme vzorec pro integrál mocniny:

$$\int (3x^{1/2}+2x^{-2})\,dx = 3\frac{x^{3/2}}{3/2}+2\frac{x^{-1}}{-1}+C = 2x^{3/2}-2x^{-1}+C = 2\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C, \quad x \in (0,\infty)$$

1.4 Další motivační úlohy

Kromě geometrie objemů se s principem integrace setkáváme v mnoha dalších situacích. Pro grafické znázornění využíváme plochu pod křivkou funkce rychlosti změny, kterou si můžeme představit jako součet nekonečně mnoha tenkých proužků.

1.4.1 Fyzika: Dráha jako integrál rychlosti

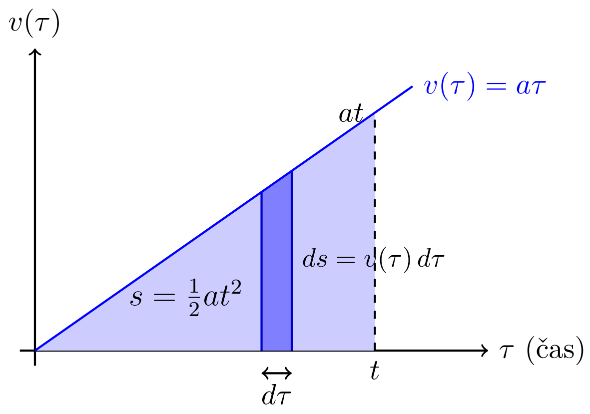
Pokud známe funkci okamžité rychlosti $v(t)$, celková dráha s uražená v čase od 0 do t je rovna ploše pod grafem této funkce. Příkladem integrálu v praxi je odvození kinematických vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb. V integrálech níže používáme integrační proměnnou τ, abychom ji odlišili od času t v horní mezi.

Pohyb z klidu ($v_0 = 0$)

Pokud těleso zrychluje z klidu se stálým zrychlením a, jeho rychlost roste podle vztahu $v(\tau) = a\tau$. Dráhu s určíme integrací této rychlosti:

$$s = \int_0^t a\tau\,d\tau = a\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}at^2 \tag{1.8}$$

Geometricky integrál odpovídá obsahu pravoúhlého trojúhelníku (obsah = polovina základny krát výška = $\frac{1}{2} \cdot t \cdot at$).

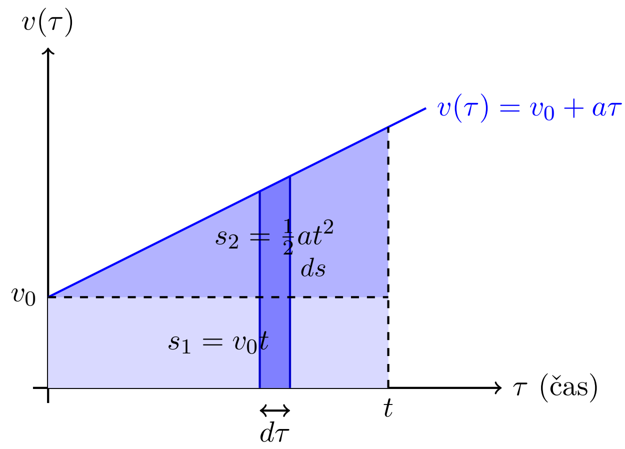


Pohyb s počáteční rychlostí ($v_0 > 0$)

Pokud má těleso v čase nula počáteční rychlost v_0, je jeho okamžitá rychlost dána vztahem $v(\tau) = v_0 + a\tau$. Integrací přesuneme prvek na výpočet celkové dráhy:

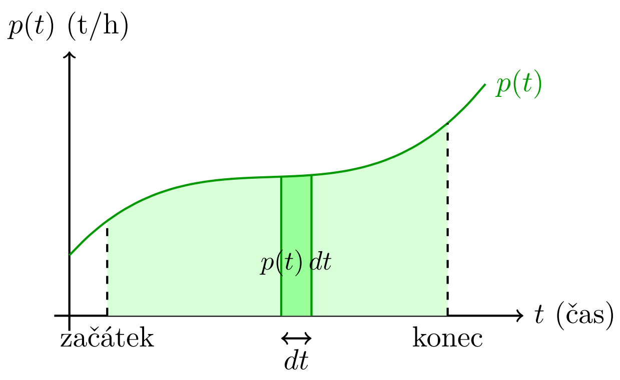
$$s = \int_0^t (v_0 + a\tau)\,d\tau = \left[v_0\tau + a\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.9}$$

Geometricky se jedná o obsah lichoběžníku pod grafem, který můžeme elegantně rozdělit na obdélník (dráha od počáteční rychlosti) a trojúhelník (dráha přidaná zrychlením).



1.4.2 Ekonomie: Celková produkce

Mějme funkci $p(t)$, která udává okamžitou produkci továrny (např. tuny oceli za hodinu). Celkové množství vyrobeného materiálu za směnu získáme integrací této míry produkce přes časové období.



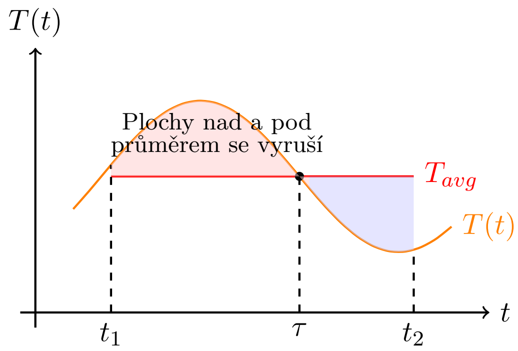
1.4.3 Statistika: Střední hodnota spojité veličiny

Průměrná teplota během dne není prostým průměrem naměřených hodnot v celou hodinu, ale podílem integrálu teplotní funkce a délky časového intervalu:

$$T_{avg} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T(t)\, dt \tag{1.10}$$

Geometricky to znamená, že plocha pod grafem funkce $T(t)$ je stejná jako plocha obdélníku o základně $t_2 - t_1$ a výšce T_{avg}. Jinými slovy, obsah plochy, kde křivka přesahuje průměrnou hodnotu, se přesně vyruší s obsahem plochy, kde je křivka pod průměrem.

Je-li funkce $T(t)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[t_1, t_2]$, zaručuje nám tzv. **Věta o střední hodnotě integrálního počtu**, že tato průměrná teplota je během dne skutečně naměřena. Existuje tedy alespoň jeden časový okamžik $\tau \in [t_1, t_2]$, pro který platí $T(\tau) = T_{avg}$.



Kapitola 2

Od neurčitého k určitému: Newtonův integrál

V našem motivačním příkladu s vázou jsme zjistili, že pro výpočet konkrétního objemu potřebujeme vyhovět podmínce $V(0) = 0$. I když existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí (lišících se o konstantu C), právě tato počáteční podmínka nám umožní vybrat tu jedinou správnou, která odpovídá fyzikální realitě — tedy že prázdná nádoba má nulový objem. Pokud chceme spočítat celkovou změnu veličiny (např. celkový objem od výšky a do výšky b), nezajímá nás konkrétní hodnota integrační konstanty C, protože se při odečtení koncových stavů vyruší. Tento rozdíl hodnot libovolné primitivní funkce v krajních bodech intervalu definujeme jako Newtonův integrál.

2.1 Definice Newtonova integrálu

Definice (Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na (a, b) a má zde primitivní funkci F. Nechť existují konečné limity $\lim_{x\to a^+} F(x) =: F(a^+)$ a $\lim_{x\to b^-} F(x) =: F(b^-)$. Pak číslo

$$[F(x)]_a^b := F(b^-) - F(a^+) \tag{2.1}$$

nazýváme **Newtonovým určitým integrálem** funkce f od a do b a značíme jej:

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

Poznámka. Pokud je z kontextu jasné, že se jedná o Newtonův integrál, vynecháme (N) před znakem integrálu $\int$.

Poznámka k matematickému značení: Zápis =: a := slouží k zavedení definice nového pojmu nebo zkratky, aby bylo jasné, co je definováno čím. Zápis $A := B$ čteme „výraz A definujeme jako B“ (dvojtečka je na straně nově zaváděného symbolu). Zápis $B =: A$ je ekvivalentní a čteme jej „výraz B je definován jako A“. V situacích, kde nehrozí záměna s jinými typy integrálů (např. Riemannovým), symbol (N) u Newtonova integrálu pro přehlednost vynecháváme, jak budeme činit i v následujícím textu.

Příklady

1. Vypočtěte určitý integrál $\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Nejprve najdeme primitivní funkci a poté aplikujeme Newtonův vzorec dosazením horní a dolní meze:

$$\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - x\right]_1^3 = (3^2-3)-(1^2-1) = (9-3)-(1-1) = 6-0 = 6$$

2. Vypočtěte určitý integrál $\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x$.

   Řešení:

$$\int_0^2 3x^2\,\mathrm{d}x = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[x^3\right]_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8$$

2.2 Vlastnosti Newtonova integrálu

V předchozích kapitolách jsme definovali Newtonův integrál a naučili se jej počítat pomocí nalezení primitivní funkce a dosazení krajních bodů intervalu. V praxi se však často setkáváme s funkcemi, které jsou příliš složité na to, abychom jejich primitivní funkci určili přímo, nebo s funkcemi, které jsou dány po částech. V této kapitole si představíme základní vlastnosti Newtonova integrálu, které nám umožní tyto složitější úlohy rozložit na menší a snáze řešitelné kroky. Ukážeme si, že integrál přirozeně "dědí"mnohé vlastnosti od limit a derivací.

2.2.1 Linearita

Než začneme integrovat složité výrazy, je užitečné si uvědomit, jak se integrál chová k základním aritmetickým operacím – sčítání a násobení konstantou. Vzhledem k tomu, že výpočet Newtonova integrálu stojí na hledání primitivní funkce (což je proces opačný k derivování) a na výpočtu limit, dalo by se očekávat, že integrál bude zachovávat linearitu stejně jako derivace a limity. Následující věta potvrzuje, že tomu tak skutečně je.

Věta (linearita Newtonova integrálu)

Pro Newtonův určitý integrál platí (pokud integrály na pravé straně existují):

- **Integrál součtu a rozdílu:** $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- **Integrál násobku:** $\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $c \in \mathbb{R}$

Důkaz: Důkaz provedeme pro součet funkcí, důkaz pro rozdíl a násobek konstantou je analogický. Nechť F je primitivní funkce k funkci f a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b). Z pravidel pro derivování víme, že $(F+G)' = f + g$, takže funkce $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ na (a, b).

Podle definice Newtonova integrálu platí:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-}(F(x)+G(x)) - \lim_{x\to a^+}(F(x)+G(x))$$

Protože předpokládáme, že integrály na pravé straně věty existují (a tedy existují příslušné vlastní limity funkcí F a G v krajních bodech), můžeme využít větu o limitě součtu a limity rozdělit:

$$= \left(\lim_{x\to b^-} F(x) + \lim_{x\to b^-} G(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x) + \lim_{x\to a^+} G(x)\right)$$

Přeuspořádáním členů získáme:

$$= \left(\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)\right) + \left(\lim_{x\to b^-} G(x) - \lim_{x\to a^+} G(x)\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Čímž je důkaz hotov. ■

Příklad na linearitu

Příklad: Vypočtěte Newtonův určitý integrál $\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + 2\right)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Zadaný integrál se skládá ze tří sčítanců. Pomocí věty o linearitě (integrál součtu a rozdílu, integrál násobku) si jej můžeme rozdělit na tři jednodušší integrály. Tím se vyhneme chybám při počítání s dlouhými výrazy:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{4}{x^2} + 2\right)\,\mathrm{d}x &= 3\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x - 4\int_1^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x + 2\int_1^2 1\,\mathrm{d}x \\
&= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 - 4\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 + 2\,[x]_1^2 \\
&= \left[x^3\right]_1^2 + 4\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + 2\,[x]_1^2 \\
&= (8-1) + 4\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 2(2-1) \\
&= 7 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 2(1) \\
&= 7 - 2 + 2 = 7
\end{aligned}$$

Didaktická poznámka: Upozorněte studenty, že v praxi často mezikrok s rozpisováním na více integrálů vynecháváme a integrujeme "člen po členu"rovnou do jedné hranaté závorky. Pro počáteční porozumění je ale tento rozpis zásadní.

2.2.2 Aditivita vzhledem k intervalu

Někdy se dostaneme do situace, kdy se funkce na zadaném intervalu chová "nesourodě"– například je dána po částech různými předpisy, nebo obsahuje absolutní hodnotu. Z definice Newtonova integrálu však potřebujeme najít jedinou primitivní funkci na celém integračním oboru. Co když to ale není možné, nebo je to příliš pracné? Bylo by přirozené rozdělit si integrační obor na více částí, spočítat integrály zvlášť a výsledky sečíst. Zda je tento intuitivní krok matematicky korektní, nám řekne věta o aditivitě.

Věta (Aditivita Newtonova integrálu přes intervaly)

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$. Nechť má funkce f na intervalu (a, b) primitivní funkci F. Pak platí **aditivita vzhledem k integračnímu oboru:** Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2.3}$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Protože má funkce F na (a, b) vlastní derivaci (rovnou f), je v každém bodě tohoto intervalu – a tedy i v bodě c – spojitá. Z toho vyplývá, že $\lim_{x\to c} F(x) = F(c)$.

Z definice Newtonova integrálu platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

Pokud k tomuto výrazu přičteme a odečteme hodnotu $F(c)$, nezměníme jeho celkovou hodnotu:

$$= \lim_{x\to b^-} F(x) - F(c) + F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

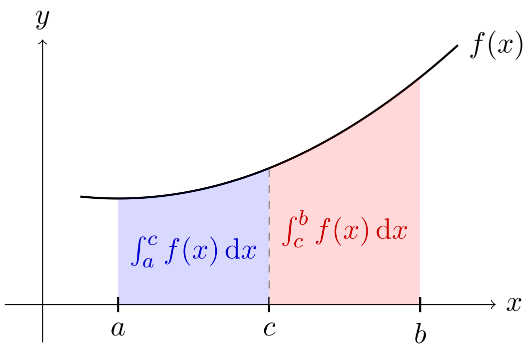
Tento výraz nyní můžeme přeskupit a využít faktu, že $F(c) = \lim_{x\to c^-} F(x) = \lim_{x\to c^+} F(x)$ díky spojitosti:

$$= \left(\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to c^+} F(x)\right) + \left(\lim_{x\to c^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)\right)$$

Což přesně odpovídá součtu integrálů z pravé strany tvrzení věty:

$$= \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

■



Příklad na aditivitu

Příklad: Vypočtěte určitý integrál $\int_0^3 |x-1|\,dx$. *Řešení:* Funkce $f(x) = |x-1|$ mění svůj předpis v bodě $x = 1$. Pro $x \in [0,1)$ je $f(x) = 1 - x$ a pro $x \in [1,3]$ je $f(x) = x - 1$. Využijeme aditivitu integrálu a rozdělíme jej na dva:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 |x-1|\,dx &= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (0) + \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

2.3 Definice Newtonova integrálu pro obecné meze

DOPLŇ ÚVODNÍ TEXT

Definice (Newtonův integrál pro obecné meze)

Nechť a, b $\in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Definujeme

1. **Integrál přes bod (stejné meze):**

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{2.4}$$

2. **Záměna mezí:**

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.5}$$

DOPLŇ SPOJUJÍCÍ TEXT

Věta (Aditivita Newtonova integrálu pro obecné intervaly)

Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. Nechť má funkce f na všech zúčastněných intervalech primitivní funkci F. Pak platí **aditivita vzhledem k integračnímu oboru:** Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2.6}$$

2.4 Výpočet pro komolý kužel

Abychom určili $S(h)$, musíme nejprve vyjádřit poloměr hladiny $r(h)$ v závislosti na výšce. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá:

$$r(h) = r + \frac{R-r}{H} \cdot h \tag{2.7}$$

Obsah kruhové hladiny je $S(h) = \pi \cdot [r(h)]^2$. Dosadíme do integrálu pro objem:

$$V(h) = \int_0^h \pi \left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^2 \mathrm{d}x \tag{2.8}$$

Abychom integrál spočítali, umocníme závorku podle vzorce $(A+B)^2$:

$$V(h) = \pi \int_0^h \left(r^2 + 2r\frac{R-r}{H}x + \frac{(R-r)^2}{H^2}x^2\right) \mathrm{d}x \tag{2.9}$$

Nyní využijeme vzorce pro integrál součtu a integrál mocniny x^n:

$$V(h) = \pi \left[r^2 x + 2r\frac{R-r}{H}\frac{x^2}{2} + \frac{(R-r)^2}{H^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^h \tag{2.10}$$

Po dosazení horní meze h (dolní mez 0 dává nulový výsledek) a úpravě získáme:

$$V(h) = \pi \left(r^2 h + r\frac{R-r}{H}h^2 + \frac{(R-r)^2}{3H^2}h^3\right) \tag{2.11}$$

Tento výraz můžeme vytknutím $\frac{h}{3}$ převést na klasický tvar:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h \left(3r^2 + 3r\frac{R-r}{H}h + \frac{(R-r)^2}{H^2}h^2\right) \tag{2.12}$$

Jelikož víme, že pro poloměr hladiny platí vztah $r(h) = r + \frac{R-r}{H}h$, můžeme odvodit, že $\frac{R-r}{H}h = r(h) - r$. Tento výraz dosadíme do závorky:

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi h \left(3r^2 + 3r(r(h) - r) + (r(h) - r)^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi h \left(3r^2 + 3r \cdot r(h) - 3r^2 + r(h)^2 - 2r \cdot r(h) + r^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi h \left(r^2 + r \cdot r(h) + r(h)^2\right) \end{aligned}$$

Tím jsme odvodili známý vzorec pro objem komolého kužele.

Kapitola 3

První výpočty

3.1 Základní vzorce

Přímo z definice primitivní funkce odvodíme následující vzorce, které budeme v dalším používat.

Úkol

Odvoďte následující vzorce z pravidel pro derivování:

$$
\begin{aligned}
\int x^n \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ pro } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \ln|x| \quad \text{(řeší případ pro } n = -1) \\
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x \\
\int \sin(x) \,\mathrm{d}x &= -\cos(x) \\
\int \cos(x) \,\mathrm{d}x &= \sin(x)
\end{aligned}
$$

Všimněte si, že nám v základní tabulce chybí vzorec pro integrál z logaritmu. Dále neexistují univerzální vzorce pro integrál součinu, podílu nebo integrál složené funkce tak, jak je známe z diferenciálního počtu. Pro integrování totiž neexistuje jednoduchý a vždy fungující algoritmický návod. Místo něj máme k dispozici různé metody, u kterých je často potřeba určitý vhled, cvik a praxe.

3.2 Lineární substituce

Dříve než se pustíme do složitějších metod, podíváme se na speciální případ složené funkce, který lze vyřešit jednoduchou úvahou. Předpokládejme, že známe primitivní funkci F k funkci f (tedy platí $F' = f$). Ptáme se, jaká je primitivní funkce k funkci $f(ax + b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$.

Zkusme jako první tip použít přímo $F(ax + b)$. Podle řetízkového pravidla pro derivaci složené funkce platí:

$$[F(ax + b)]' = F'(ax + b) \cdot (ax + b)' = f(ax + b) \cdot a$$

Vidíme, že jsme získali požadovanou funkci $f(ax + b)$, ale navíc je zde nechtěný násobek a. Abychom se ho zbavili, stačí náš původní tip podělit konstantou a. Získáváme tak velmi užitečné pravidlo:

Věta (Lineární substituce)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu I a F je k ní na tomto intervalu primitivní funkce. Pak pro každé reálné $a \neq 0$ a $b \in \mathbb{R}$ platí na odpovídajícím intervalu:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \tag{3.1}$$

Tento jednoduchý princip nám v praxi ušetří spoustu práce. Pojďme si to ukázat na problému, který jsme v minulé kapitole řešili poměrně pracně.

3.3 Výpočet pro komolý kužel – elegantnější cesta

Zkusme znovu odvodit objem komolého kužele o výšce h, se spodním poloměrem r a poloměrem hladiny $r(h)$. V minulé kapitole jsme sestavili integrál:

$$V(h) = \int_0^h \pi \left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^2 \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

Dříve jsme museli závorku umocnit. Nyní však vidíme, že jde o složenou funkci, kde vnější funkce je druhá mocnina (její primitivní funkce je třetí mocnina lomeno třemi) a vnitřní funkce je lineární výraz $ax+b$, kde roli konstanty a hraje zlomek $\frac{R-r}{H}$.

Podle vzorce (3.1) můžeme rovnou integrovat:

$$V(h) = \pi \frac{1}{\frac{R-r}{H}} \left[\frac{\left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^3}{3} \right]_0^h = \pi \frac{H}{R-r} \left[\frac{(r(x))^3}{3} \right]_0^h \tag{3.3}$$

Zavedli jsme pomocné značení $r(x) = r + \frac{R-r}{H}x$, což je přesně poloměr v dané výšce x. Po dosazení horní a dolní meze dostáváme:

$$V(h) = \pi \frac{H}{R-r} \left(\frac{r(h)^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{\pi H}{3(R-r)} \left(r(h)^3 - r^3 \right) \tag{3.4}$$

Abychom získali klasický vzorec, stačí si uvědomit, že pro poloměr platí $r(h) - r = \frac{R-r}{H}h$. Z toho můžeme vyjádřit $\frac{H}{R-r} = \frac{h}{r(h)-r}$ a tento vztah dosadit:

$$V(h) = \frac{\pi h}{3(r(h)-r)} \left(r(h)^3 - r^3 \right) \tag{3.5}$$

Nyní využijeme algebraický vzorec pro rozdíl třetích mocnin $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$:

$$V(h) = \frac{\pi h}{3(r(h)-r)} (r(h)-r) \left(r(h)^2 + r(h)r + r^2 \right) \tag{3.6}$$

Závorky $(r(h)-r)$ se vykrátí a zůstává nám onen známý, úhledný výsledek. Všimněte si, jak nás znalost pokročilejšího integračního pravidla uchránila před zdlouhavým algebraickým roznásobováním z minulé kapitoly!

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h \left(r(h)^2 + r(h)r + r^2 \right) \tag{3.7}$$

3.4 Pravidlo per partes (po částech)

Jak jsme zmínili, integrál součinu neexistuje v jednoduché podobě $\int f \cdot g = \int f \cdot \int g$. Můžeme ale vyjít ze vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí $u(x)$ a $v(x)$:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \tag{3.8}$$

Zintegrujeme-li obě strany této rovnice (a vynecháme-li pro přehlednost argument x), dostaneme:

$$u \cdot v = \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x + \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x \tag{3.9}$$

Po jednoduché úpravě (odečtení jednoho z integrálů) získáme vzorec pro metodu zvanou:

Metoda per partes (po částech)

Pro funkce u, v diferencovatelné na intervalu I můžeme při znalosti primitivní funkce k $u'v$ vyjádřit primitivní funkci k uv' jako:

$$\int u \cdot v' \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x \tag{3.10}$$

Tato metoda z integrálu nedělá hotový výsledek, ale převádí jeden integrál ($\int u \cdot v'$) na jiný ($\int u' \cdot v$). Naším cílem je volit funkce u a v' tak, aby byl nový integrál jednodušší než ten původní. Typicky za u volíme funkci, která se derivováním zjednoduší (např. polynomy).

3.5 Řešené příklady na metodu per partes

1. **Typický součin polynomu a exponenciály**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int xe^x \,\mathrm{d}x$.

   Řešení a metodika: Máme před sebou součin dvou funkcí různých typů (polynom a exponenciála). To je klasický adept na metodu per partes. Klíčem k úspěchu je správná volba funkcí u a v'. Jak jsme zmínili v úvodu k této metodě, za u (funkci, kterou budeme derivovat) chceme zvolit tu, která se derivováním zjednoduší. Zkusme si rozebrat obě možnosti:

   - **Slepá ulička:** Pokud bychom zvolili $u = e^x$ a $v' = x$, dostali bychom $u' = e^x$ a $v = \frac{x^2}{2}$. Nový integrál ve vzorci by pak vypadal jako $\int e^x \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x$. Tím jsme si vůbec nepomohli, naopak je integrál ještě složitější (zvedli jsme stupeň polynomu).
   - **Správná cesta:** Zvolíme-li $u = x$, derivací získáme $u' = 1$. Polynom se zredukoval na konstantu a to nám pomůže.

   Zvolíme tedy:

   $$\begin{aligned} u &= x & &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ v' &= e^x & &\Rightarrow \quad v = e^x \end{aligned}$$

   Po dosazení do vzorce per partes dostáváme:

   $$\int xe^x \,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \,\mathrm{d}x$$

   Druhý integrál je již základní tabulkový integrál exponenciály, takže můžeme výpočet rovnou dokončit. Pro úhlednější zápis můžeme exponenciálu vytknout:

   $$\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Tip pro učitele: Doporučte studentům, aby si u metody per partes provedli zkoušku zpětným derivováním výsledku. Skvěle si tím procvičí derivaci součinu a přímo uvidí, jak se členy v rovnici $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ navzájem odečtou a zbyde jen původní zadání.

2. **Neurčitý integrál logaritmu**

Nyní máme nástroj k tomu, abychom spočítali integrál z přirozeného logaritmu, který nám v základní tabulce chyběl. Trik spočívá v tom, že si logaritmus představíme jako součin $1 \cdot \ln(x)$.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Zvolíme:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & &\Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x} \\ v' &= 1 & &\Rightarrow \quad v = x \end{aligned}$$

Po dosazení do vzorce per partes:

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$$

3. **Určitý integrál logaritmu a skrytý chyták**

Pojďme vypočítat určitý integrál $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$. Na první pohled jde o dosazení do výsledku, který jsme právě získali:

$$\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_0^1$$

Zde jako učitelé musíme zbystřit! Funkce $\ln(x)$ není v bodě $x = 0$ definována a má zde vertikální asymptotu. Jedná se tedy o **nevlastní integrál vlivem meze** a dolní mez musíme řešit pomocí pravostranné limity.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x &= (1 \cdot \ln(1) - 1) - \lim_{x\to 0^+} (x\ln(x) - x) \\ &= (0 - 1) - \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) + \lim_{x\to 0^+} x \\ &= -1 - \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) + 0 \end{aligned}$$

Limitu $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$ řešíme jako neurčitý výraz typu $0\cdot(-\infty)$ převedením na l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Celkový výsledek integrálu je tedy -1. Geometricky to znamená, že ačkoliv má plocha mezi osou y a grafem logaritmu nekonečně dlouhý „zobák“ směřující dolů, má tento region konečný obsah rovný 1.

4. **Per partes a lineární substituce v jednom**

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x\sin(5x)\,\mathrm{d}x$ a proveďte zkoušku.

Řešení: Opět máme součin polynomu (x) a goniometrické funkce $(\sin(5x))$. Za funkci u, kterou budeme derivovat, zvolíme polynom, aby se snížil jeho stupeň.

$$\begin{aligned} u &= x & &\Rightarrow \quad u' = 1 \\ v' &= \sin(5x) & &\Rightarrow \quad v = -\frac{1}{5}\cos(5x) \end{aligned}$$

Metodická poznámka: U výpočtu funkce v jsme využili pravidlo pro integrál složené funkce s lineární vnitřní funkcí (rovnice 3.1), které jsme odvodili dříve. Nezapomeňte funkci vydělit koeficientem 5!

Dosadíme do vzorce per partes:

$$\begin{aligned}\int x\sin(5x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos(5x)\right)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\int\cos(5x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nyní zbývá dopočítat integrál z kosinu, kde opět aplikujeme pravidlo o dělení vnitřní derivací:

$$\begin{aligned}\int x\sin(5x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\sin(5x)\right) + C\\ &= -\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C, \quad x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Zkouška: Zpětným derivováním ověříme správnost výsledku. U prvního členu musíme použít pravidlo pro derivaci součinu:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x)\right)' &= \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\cos(5x) + \left(-\frac{1}{5}x\right)\cdot\big(-\sin(5x)\cdot 5\big) + \frac{1}{25}\cos(5x)\cdot 5\\ &= -\frac{1}{5}\cos(5x) + x\sin(5x) + \frac{1}{5}\cos(5x)\\ &= x\sin(5x)\end{aligned}$$

Krajní členy se odečetly a zůstal nám přesně původní integrand. Výpočet je správný.

5. **Vícenásobné použití per partes**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x$ a proveďte zkoušku.

   Řešení: Protože máme polynom třetího stupně, jedno použití per partes ho zredukuje pouze na polynom druhého stupně. Metodu tedy budeme muset aplikovat celkem třikrát. U těchto příkladů je naprosto klíčová formální pečlivost a hlídání znamének.

   1. krok per partes:

$$\begin{aligned} u &= x^3 && \Rightarrow\quad u' = 3x^2\\ v' &= e^{2x} && \Rightarrow\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}$$

$$\int x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

   2. krok per partes (pro integrál $\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned} u &= x^2 && \Rightarrow\quad u' = 2x\\ v' &= e^{2x} && \Rightarrow\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}$$

$$\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$$

   3. krok per partes (pro integrál $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned} u &= x && \Rightarrow\quad u' = 1\\ v' &= e^{2x} && \Rightarrow\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}\end{aligned}$$

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

Sestavení celkového výsledku: Nyní dosadíme všechny mezivýpočty zpět "odspoda nahoru". Pozor na záporná znaménka před integrály!

$$\begin{aligned}\int x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right] + C\\ &= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C\end{aligned}$$

Pro přehlednost vytkneme exponenciálu:

$$\int x^3e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Zkouška: Derivujeme součin exponenciály a polynomu v závorce.

$$\begin{aligned}\left[e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)\right]' &= 2e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + e^{2x}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{3}{4}\right)\\ &= e^{2x}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)\\ &= e^{2x}(x^3)\end{aligned}$$

Zkouška opět potvrzuje správnost našeho poměrně dlouhého výpočtu.

3.6 Metoda neurčitých součinitelů

Jak jsme viděli u vícenásobného použití metody per partes, výpočty mohou být velmi zdlouhavé a náchylné k chybám ve znaménkách nebo konstantách. Častou a elegantní alternativou je **metoda neurčitých součinitelů** (někdy zvaná *odhadová metoda*). Tato metoda je založená na tom, že dokážeme dopředu odhadnout tvar primitivní funkce. Využíváme faktu, že derivací polynomu je opět polynom a derivací funkcí e^{ax}, $\sin(ax)$ či $\cos(ax)$ jsou opět tytéž funkce. Výsledek tedy hledáme ve stejném tvaru, v jakém je zadání, ale s neznámými koeficienty. Tyto koeficienty následně určíme zkouškou – derivací našeho odhadu a porovnáním se zadanou funkcí.

Proč můžeme koeficienty porovnávat? Naším cílem je, aby se derivace odhadnuté funkce rovnala zadané funkci pro *úplně každé* x z příslušného intervalu. Dva polynomy (nebo lineární kombinace goniometrických či exponenciálních funkcí) se identicky rovnají pro všechna x tehdy a jen tehdy, když se rovnají jejich koeficienty u odpovídajících si členů (např. koeficient u x^2 na levé straně se musí rovnat koeficientu u x^2 na pravé straně). Jiným způsobem této trvalé rovnosti dosáhnout nelze. Tímto porovnáním získáme soustavu lineárních rovnic, ze které neznámé součinitele snadno vypočítáme.

Tato metoda funguje skvěle na součiny polynomů s exponenciálními nebo goniometrickými funkcemi. **Nelze ji však použít na logaritmus!** Při derivaci funkce $\ln(x)$ totiž vzniká racionální lomená funkce $1/x$, čímž se naruší struktura polynomu a odhadnutý tvar by se po derivaci nikdy nemohl rovnat původnímu zadání. Pro integrály jako $\int x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ nebo prostý $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ musíte vždy použít metodu per partes.

3.6.1 Exponenciální funkce

Pokud integrujeme výraz ve tvaru $P(x)e^{ax}$, kde $P(x)$ je polynom, hledáme primitivní funkci ve tvaru $Q(x)e^{ax}$, kde $Q(x)$ je polynom stejného stupně jako $P(x)$.

1. **Exponenciála a polynom 1. stupně**

   Spočítejme znovu integrál $\int xe^x \, \mathrm{d}x$.

   Řešení: Polynom $P(x) = x$ je 1. stupně, $a = 1$. Odhadneme tedy výsledek jako polynom 1. stupně krát exponenciálu:

   $$\int xe^x \, \mathrm{d}x = (Ax + B)e^x + C$$

   Aby to byla primitivní funkce, musí platit, že její derivace je rovna zadané funkci xe^x. Zderivujeme náš odhad (podle pravidla pro derivaci součinu):

   $$[(Ax + B)e^x]' = Ae^x + (Ax + B)e^x = e^x(Ax + A + B)$$

   Nyní porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin x s původní funkcí xe^x:

   $$\begin{aligned} x^1: &\quad A = 1 \\ x^0: &\quad A + B = 0 \implies 1 + B = 0 \implies B = -1 \end{aligned}$$

   Výsledek je tedy $(x - 1)e^x + C$, což se přesně shoduje s naším dřívějším výpočtem.

2. **Exponenciála a polynom 3. stupně**

   Spočítejme integrál $\int x^3 e^{2x} \, \mathrm{d}x$, na který jsme předtím potřebovali třikrát aplikovat per partes.

   Řešení: Polynom v zadání je 3. stupně, odhadovaný výsledek bude mít tvar:

   $$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x}$$

   Zderivujeme tento odhad:

   $$(3Ax^2 + 2Bx + C)e^{2x} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cdot 2e^{2x}$$

   Exponenciálu e^{2x} vytkneme a sloučíme členy u stejných mocnin x:

   $$e^{2x}\left[2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + (2B + 2C)x + (C + 2D)\right]$$

   Porovnáme s původní funkcí $x^3 e^{2x}$ a řešíme jednoduchou soustavu rovnic:

   $$\begin{aligned} x^3: &\quad 2A = 1 \implies A = \frac{1}{2} \\ x^2: &\quad 3A + 2B = 0 \implies \frac{3}{2} + 2B = 0 \implies B = -\frac{3}{4} \\ x^1: &\quad 2B + 2C = 0 \implies -\frac{6}{4} + 2C = 0 \implies C = \frac{3}{4} \\ x^0: &\quad C + 2D = 0 \implies \frac{3}{4} + 2D = 0 \implies D = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

   Získali jsme výsledek $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + C$, ke kterému jsme předtím dospěli mnohem pracnější cestou.

3.6.2 Goniometrické funkce

U goniometrických funkcí se situace mírně komplikuje tím, že derivace sinu je kosinus a naopak. Proto, i když je v zadání pouze sinus, v odhadovaném výsledku musíme předpokládat **jak sinus, tak kosinus**, a to oba se svými vlastními neznámými polynomy.

1. **Sinus a polynom 1. stupně**

   Spočítejme integrál $\int x \sin(5x)\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Odhadovaný výsledek bude mít tvar dvou lineárních polynomů:

   $$(Ax+B)\sin(5x)+(Cx+D)\cos(5x)$$

   Zderivujeme (pomocí derivace součinu u obou členů a s uvážením derivace složené funkce):

   $$\begin{aligned}&A\sin(5x)+(Ax+B)\cdot 5\cos(5x)+C\cos(5x)-(Cx+D)\cdot 5\sin(5x)\\ &=\sin(5x)[A-5Cx-5D]+\cos(5x)[5Ax+5B+C]\end{aligned}$$

   Rozepíšeme si to podle mocnin x u jednotlivých goniometrických funkcí. Zadání je $1x\sin(5x)+0\cos(5x)$:

   $$\begin{aligned}x\cdot\sin(5x):&\quad -5C=1 \implies C=-\frac{1}{5}\\ 1\cdot\sin(5x):&\quad A-5D=0\\ x\cdot\cos(5x):&\quad 5A=0\implies A=0\implies D=0\\ 1\cdot\cos(5x):&\quad 5B+C=0\implies 5B-\frac{1}{5}=0\implies B=\frac{1}{25}\end{aligned}$$

   Dosazením koeficientů A,B,C,D dostáváme výsledek $\frac{1}{25}\sin(5x)-\frac{1}{5}x\cos(5x)+C$, což opět plně souhlasí s výpočtem pomocí per partes.

2. **Kosinus a polynom 1. stupně**

   Vypočtěte integrál $\int(2x-1)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Postupujeme analogicky. Náš odhad výsledku je:

   $$(Ax+B)\sin(3x)+(Cx+D)\cos(3x)$$

   Derivace odhadu:

   $$\begin{aligned}&A\sin(3x)+3(Ax+B)\cos(3x)+C\cos(3x)-3(Cx+D)\sin(3x)\\ &=\sin(3x)[A-3Cx-3D]+\cos(3x)[3Ax+3B+C]\end{aligned}$$

   Porovnáme se zadanou funkcí $(2x-1)\cos(3x)$, u které platí $0\sin(3x)+(2x-1)\cos(3x)$:

   $$\begin{aligned}x\cdot\sin(3x):&\quad -3C=0\implies C=0\\ 1\cdot\sin(3x):&\quad A-3D=0\implies D=\frac{A}{3}\\ x\cdot\cos(3x):&\quad 3A=2\implies A=\frac{2}{3}\implies D=\frac{2}{9}\\ 1\cdot\cos(3x):&\quad 3B+C=-1\implies 3B+0=-1\implies B=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

   Výsledný integrál je:

   $$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)\sin(3x)+\frac{2}{9}\cos(3x)+C$$

3. **Sinus a polynom 2. stupně**

   Vypočtěte integrál $\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení: Jelikož je zadaný polynom kvadratický, odhadneme výsledek pomocí kvadratických polynomů pro obě goniometrické funkce:

$$(Ax^2 + Bx + C)\sin(x) + (Dx^2 + Ex + F)\cos(x)$$

Derivace odhadu (vnitřní funkce je jen x, její derivace je 1):

$$\begin{aligned}&(2Ax + B)\sin(x) + (Ax^2 + Bx + C)\cos(x) + (2Dx + E)\cos(x) - (Dx^2 + Ex + F)\sin(x)\\ &= \sin(x)[-Dx^2 + (2A - E)x + (B - F)] + \cos(x)[Ax^2 + (B + 2D)x + (C + E)]\end{aligned}$$

Porovnáme s původní funkcí $x^2\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\text{U }\sin(x):\quad & -D = 1 \implies D = -1\\ & 2A - E = 0 \implies E = 2A\\ & B - F = 0 \implies B = F\\ \text{U }\cos(x):\quad & A = 0 \implies E = 0\\ & B + 2D = 0 \implies B - 2 = 0 \implies B = 2 \implies F = 2\\ & C + E = 0 \implies C + 0 = 0 \implies C = 0\end{aligned}$$

Získali jsme koeficienty, které dosadíme zpět do našeho prvotního odhadu:

$$(0x^2 + 2x + 0)\sin(x) + (-1x^2 + 0x + 2)\cos(x) + C = 2x\sin(x) + (2 - x^2)\cos(x) + C$$

Kapitola 4

Metoda substituce: Královská disciplína integrace

Dostáváme se k nejobtížnější, ale zároveň nejmocnější technice integrálního počtu — k metodě substituce. Na rozdíl od předchozích metod zde neexistuje univerzální šablona. Úspěch často závisí na matematické intuici, schopnosti vidět ve vzorcích skryté vztahy a na obyčejném cviku. Než se podíváme na samotné integrály, připomeňme si princip substituce tam, kde ho studenti znají nejlépe: při řešení rovnic.

Motivace: Substituce v algebře

Představme si exponenciální rovnici:

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Tuto rovnici neumíme řešit přímo z hlavy. Všimneme si ale, že platí $4^x = (2^x)^2$, a můžeme ji přepsat jako:

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Zde nastupuje **metoda substituce**, která probíhá ve třech jasných fázích:

1. **Převod na jednodušší problém:** Zavedeme novou proměnnou (substituci) $y = 2^x$. Složitá exponenciální rovnice se tím transformuje na obyčejnou kvadratickou rovnici:
$$y^2 - 6y + 8 = 0$$
2. **Vyřešení jednoduššího problému:** Tuto rovnici snadno vyřešíme rozkladem $(y-2)(y-4) = 0$, z čehož získáme kořeny $y_1 = 2$ a $y_2 = 4$.
3. **Návrat k původní proměnné:** Protože nás zajímá neznámá x, nikoliv pomocné y, musíme se vrátit k naší substituci, dosadit mezivýsledky a dopočítat původní zadání:
$$2^x = 2 \implies x_1 = 1$$
$$2^x = 4 \implies x_2 = 2$$

Zcela analogicky funguje substituce u integrálů. Naším cílem je převést složitý integrál zavedením nové proměnné na jednodušší (ideálně tabulkový), ten spočítat a na závěr se vrátit k původní proměnné. Matematickým základem této metody je pravidlo pro derivaci složené funkce. Pokud F je primitivní funkce k funkci f, platí podle řetízkového pravidla:

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

Pokud obě strany této rovnice zintegrujeme, dostáváme základní vztah:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C$$

Tento vztah nám umožňuje formálně nahradit složitý vnitřní výraz novou proměnnou a převést jeden integrál na druhý. V integrálním počtu rozlišujeme dvě základní věty o substituci. Liší se tím, jakým směrem substituci provádíme, a především tím, zda pro návrat k původní proměnné potřebujeme znát inverzní funkci.

Věta (První věta o substituci)

Nechť

1. funkce $f(t)$ má na otevřeném intervalu J primitivní funkci $F(t)$,
2. funkce $t = \varphi(x)$ je diferencovatelná na otevřeném intervalu I,
3. pro všechna $x \in I$ platí $\varphi(x) \in J$.

Pak na intervalu I platí:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \tag{4.1}$$

Poznámka: Věta platí i ve slabší verzi. Interval J může být z jedné nebo z obou stran uzavřený a pak v jeho krajních bodech požadujeme platnost $F' = f$ jen pro jednostrannou derivaci ve směru zevnitř intervalu.

Důkaz první věty o substituci: Z pravidla o derivaci složené funkce plyne

$$(F(\varphi(x))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Protože je F primitivní funkcí f na intervalu J a pro $x \in I$ je $t = \varphi(x) \in J$, můžeme na pravé straně místo F' napsat f

$$(F(\varphi(x))' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Odtud plyne, že funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní funkcí $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu I. ■

Při první větě o substituci zavádíme novou proměnnou za *vnitřní funkci* (tedy $t = \varphi(x)$). Všimněte si, že pro návrat k původní proměnné se do výsledku $F(t)$ jednoduše dosadí zpět výraz $\varphi(x)$. Pro dokončení výpočtu zde tedy **nepotřebujeme** znát inverzní funkci.

Věta (Druhá věta o substituci)

Nechť

1. funkce $x = \varphi(t)$ je diferencovatelná a prostá na otevřeném intervalu I,
2. pro $t \in I$ je $\varphi'(t) \neq 0$,

   označme $J := \varphi(I) := \{\varphi(t) : t \in I\}$ (obraz intervalu I ve funkci φ),
   označme φ^{-1} funkci inverzní k φ na intervalu I,
3. nechť funkce $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu J,
4. funkce G je primitivní funkcí funkce $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ na intervalu I.

Pak na intervalu J platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) \tag{4.2}$$

Důkaz druhé věty o substituci:
K důkazu tvrzení potřebujeme ukázat, že pro $x \in J$ platí

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = f(x) \tag{4.3}$$

Z bodu 4 plyne pro $t \in I$

$$G'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \tag{4.4}$$

Z pravidla o derivaci složené funkce plyne

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \tag{4.5}$$

Pro $t = \varphi^{-1}(x)$ je $G'(\varphi^{-1}(x)) = G'(t)$ a dosazením (4.4) do (4.5) dostaneme

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot (\varphi^{-1}(x))' \tag{4.6}$$

Z věty o derivaci inverzní funkce plyne pro $x = \varphi(t)$

$$(\varphi^{-1}(x))' \cdot \varphi'(t) = 1 \tag{4.7}$$

Dosazením (4.7) do (4.6) dostaneme

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = f(\varphi(t)) \tag{4.8}$$

Odkud dostaneme (4.3). ■

Zatímco první věta „schovává“ vnitřní funkci do jednoho písmene, druhá věta naopak celou původní proměnnou x nahrazuje novou, často složitější funkcí $\varphi(t)$ (např. zavádíme $x = \sin(t)$). Pokud pravou stranu rovnice zintegrujeme podle proměnné t a získáme výsledek $G(t)$, **musíme** pro návrat k původní proměnné x použít inverzní funkci $t = \varphi^{-1}(x)$, aby platilo výchozí $\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) + C$. Nutnost existence a nalezení inverzní funkce dělá z této metody o něco náročnější nástroj.

Postup při výpočtech

Všimněte si, že substitucí $x = \varphi(t)$ přecházíme jedním nebo druhým směrem mezi integrály

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pro provedení substituce se používá zápis derivace jako podílu diferenciálů (nekonečně malých přírůstků)

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

ze kterých se vyjádří

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Tento vztah pak dosadíme do jednoho z integrálů a tím ho převedeme na druhý tvar.

4.1 Řešené příklady

1. **Integrál s jasnou vnitřní funkcí (První věta o substituci)**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Zde vidíme složenou funkci e^{x^2}, jejíž vnitřní funkce je $\varphi(x) = x^2$. Zároveň si všimneme, že derivace této vnitřní funkce, tedy $\varphi'(x) = 2x$, se v integrálu rovněž vyskytuje (a navíc v součinu). To je ideální situace pro **první větu o substituci**. Zavedeme novou proměnnou t za vnitřní funkci.

$$t = x^2$$
$$\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$$

Dosazením do integrálu dostáváme mnohem jednodušší tvar:

$$\int e^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C$$

Nyní se vrátíme k původní proměnné. Podle první věty o substituci nepotřebujeme hledat inverzní funkci, stačí prosté dosazení výrazu za t:

$$\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e^{x^2} + C$$

2. **Integrál vedoucí na logaritmus (První věta o substituci)**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int \cot x\,\mathrm{d}x$, tedy $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Zlomek můžeme vnímat jako součin $\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$. Funkce $\sin x$ je „vnitřní“ (nachází se ve jmenovateli, neboli tvoří vnitřek funkce $1/z$) a její derivace $\cos x$ je připravena v čitateli k vytvoření diferenciálu $\mathrm{d}t$. Opět použijeme **první větu o substituci**.

$$t = \sin x$$
$$\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$$

   Dosadíme:

$$\int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C$$

   Návrat k původní proměnné:

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

3. **Odstranění odmocniny (Druhá věta o substituci)**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Zde nemáme v integrálu připravenou derivaci žádné rozumné vnitřní funkce (derivace $\sqrt{x}$ je $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, což se v zadání nikde jako násobek nevyskytuje). Použijeme proto **druhou větu o substituci**. Celou původní proměnnou x nahradíme tak, abychom se elegantně zbavili odmocniny. Zvolíme $x = t^2$ a předpokládáme $t > 0$.

$$x = t^2$$
$$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

   Vidíme, že nahrazujeme samotné x novou funkcí $\varphi(t) = t^2$. Po dosazení:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2}+1} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

Získali jsme integrál racionální funkce, který vyřešíme drobnou úpravou – přičtením a odečtením jedničky v čitateli:

$$\int 2\frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2(t-\ln|t+1|)+C$$

Pro návrat k původní proměnné x nyní **potřebujeme inverzní funkci**. Jelikož $x=t^2$ a omezili jsme se na kladná t, je inverzní funkce $t=\sqrt{x}$. Získaný výraz dosadíme:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}-\ln|\sqrt{x}+1|)+C$$

4. **Goniometrická substituce (Druhá věta o substituci)**

   Vypočtěte neurčitý integrál $\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Řešení: Výraz pod odmocninou nápadně připomíná goniometrickou identitu $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$. Využijeme **druhou větu o substituci** a zavedeme $x=\sin t$, kde $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Zúžení intervalu nám zajišťuje, že funkce bude prostá (a bude tedy existovat inverze pro návrat) a zároveň bude kosinus na tomto intervalu kladný, takže $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$.

$$\begin{aligned} x &= \sin t \\ \mathrm{d}x &= \cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dosadíme do integrálu a zjednodušíme:

$$\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int\sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

Integrál z $\cos^2 t$ řešíme pomocí známého vzorce pro poloviční úhel $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$:

$$\int\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+C = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t + C$$

Nyní přichází návrat k proměnné x. Potřebujeme inverzní funkci: $t=\arcsin x$. Dále využijeme, že $\sin t = x$ a kosinus můžeme vyjádřit jako $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

Kapitola 5

Budou doplněny kapitoly

Rekurentní vzorce

Riemannův integrál

Integrovatelnost spojitých funkcí

Vztah Riemannova a Newtonova integrálu, Newton-Leibnizova věta

Geometrické aplikace integrálů

Rejstřík