

1. Formální znění (pro vaši rigorózní jistotu)

V matematické analýze se L'Hospitalovo pravidlo formuluje obvykle takto:

Nechť $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné na nějakém prstencovém okolí $P(c)$ bodu c a necht' $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in P(c)$.

Předpokládejme, že platí jedna z následujících podmínek (neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$):

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ a zároveň $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty$

Pokud navíc existuje limita (vlastní nebo nevlastní):

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Pak existuje i limita podílu původních funkcí a platí:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

2. Geometrická intuice (jak to vysvětlit žákům)

Studenti by neměli brát pravidlo jako „magický trik“. Nejlepší způsob, jak jim ho přiblížit (pro případ $\frac{0}{0}$), je přes **lokální lineární aproximaci**.

Představte si, že obě funkce $f(x)$ i $g(x)$ procházejí v bodě c nulou. Pokud se na graf v okolí bodu c "podíváme hodně zblízka", křivky obou funkcí budou vypadat téměř jako jejich tečny. Můžeme je tedy aproximovat:

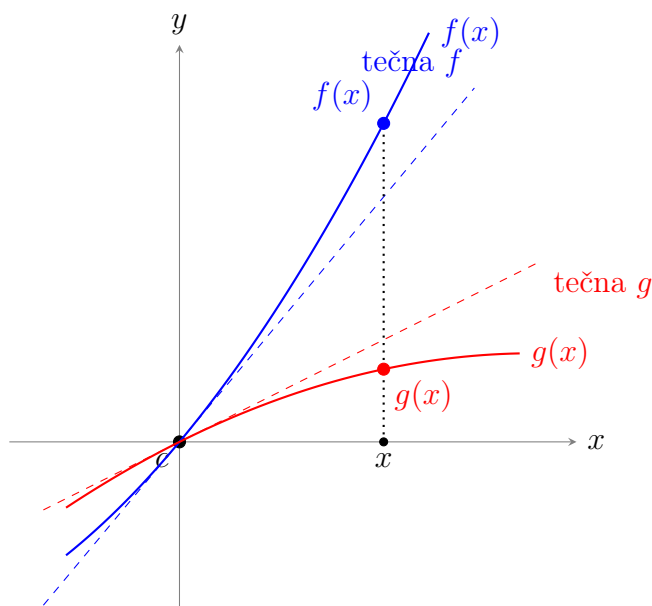
$$f(x) \approx f'(c)(x - c)$$

$$g(x) \approx g'(c)(x - c)$$

Podíl limit pak dává intuitivní smysl, protože vzdálenost na ose x se vykrátí:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(c)(x - c)}{g'(c)(x - c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Tento poměr říká, že podíl funkčních hodnot blízko kořene je dán poměrem rychlostí, jakým obě funkce k této nule klesají (nebo rostou).



Graf ilustrující

L'Hospitalovo pravidlo pro limitu typu $0/0$ v bodě 0 . Podíl $f(x)/g(x)$ nahradíme podílem směrnic tečen.

3. Didaktické poznámky: Nejčastější žakovské chyby

Jako učitel se s těmito chybami setkáte velmi často. Je dobré na ně žáky předem upozornit:

- **Aplikace pravidla, i když to není typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$:** Toto je chyba číslo jedna. Student vidí limitu zlomku a automaticky derivuje vršek a spodek, aniž by si ověřil podmínky. Výsledek je pak samozřejmě špatně (např. u $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$).
- **Záměna s derivací podílu:** Studenti často začnou zlomek $\frac{f(x)}{g(x)}$ derivovat složitě pomocí pravidla pro derivaci podílu $\left(\frac{u}{v}\right)'$, místo aby derivovali čitatele a jmenovatele odděleně.
- **Aplikace na příklady, kde pravidlo cyklí:** Existují limity, kde L'Hospitalovo pravidlo nikam nevede a neustále střídá dva tvary do kola (např. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$). Slouží to jako dobrá ukázka, že L'Hospital není všemocný a někdy je obvyčejné vytknutí mnohem efektivnější.
- **Obrácená implikace:** Pravidlo říká "Pokud existuje limita podílu derivací, pak...". Pokud limita podílu derivací neexistuje, **neznamená to**, že neexistuje původní limita.