

Limita složené funkce: Monotonie a substituce

Materiál pro studenty učitelství matematiky

1 Úvod do problematiky

Při výpočtu limit složených funkcí typu $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x))$ často využíváme metodu substituce $y = g(x)$. Abychom mohli formálně přepsat limitu na $\lim_{y \rightarrow D} f(y)$, musí být splněny určité podmínky.

V základním kurzu analýzy se uvádějí dvě postačující podmínky pro platnost věty o limitě složené funkce:

1. **Spojitosť vnější funkce:** Funkce f je spojitá v bodě $D = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
2. **Vyhnutí se limitě:** Funkce $g(x)$ nenabývá hodnoty D na nějakém prstencovém okolí bodu c .

V tomto textu se zaměříme na specifickou, ale v praxi velmi častou situaci, kdy je vnitřní funkce ****ryze monotónní****. Ryzí monotonie totiž automaticky zajišťuje splnění podmínky č. 2 (vyhnutí se limitě) a navíc nám dává přesnou informaci o tom, zda se jedná o limitu jednostrannou.

2 Věta o limitě složené funkce s monotónní vnitřní složkou

Následující věta shrnuje situaci pro jednostranné limity. Pro účely důkazu ři specifické kombinace (z mnoha možných), které ilustrují různé typy limit (vlastní/nevlastní body, rostoucí/klesající funkce).

Věta 1 (O substituci v limitě s monotónní funkcí). *Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A, L \in \mathbb{R}^*$, funkce g je na levém/pravém okolí bodu c ryze monotónní (tj. buď rostoucí nebo klesající) a A je limita funkce g v bodě c zleva/zprava.*

Nechť funkce f má v bodě A limitu L .

Pak má složená funkce $f(g(x))$ v bodě c limitu rovnou L .

Předpoklad $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = L$ lze (pro $A \in \mathbb{R}$) omezit na jednostrannou limitu, její typ záleží na druhu monotonie funkce g a druhu jednostranné limity v bodě c .

Tvrzení platí i pro limity $c \in \{\infty, -\infty\}$. V tom případě není nutný předpoklad monotonie funkce g , pokud platí (a my ho v tomto textu budeme vyžadovat), lze pak předpoklad limity funkce f v bodě A omezit na jednostranné limity.

V dalším zformulujeme a dokážeme několik konkrétních příkladů.

3 Vybraná tvrzení a jejich důkazy

V této části dokážeme větu o limitě složené funkce pro tři specifické případy. Grafy pod každým tvrzením ilustrují přenos okolí:

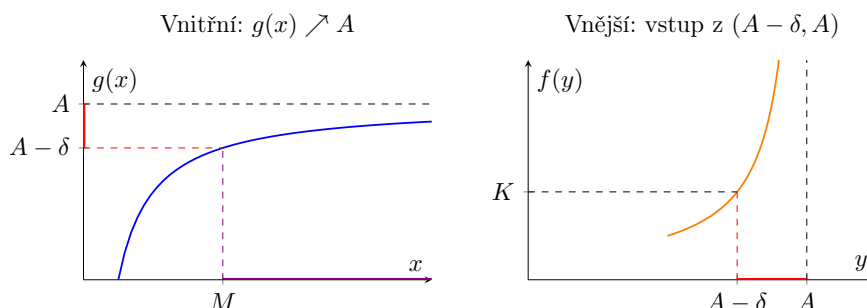
- **Fialová (vlevo dole):** Okolí bodu c (vstup x).
- **Červená (spojnice):** Hodnoty $g(x)$ se stávají vstupem pro $f(y)$.

Tvrzení 1 ($x \rightarrow \infty$, vlastní limita vnitřní funkce, nevlastní limita vnější funkce). *Nechť $c = \infty$, $A \in \mathbb{R}$, $L = \infty$. Předpokládejme:*

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$,
2. *funkce g je na jistém okolí ∞ ryze rostoucí,*
3. $\lim_{y \rightarrow A^-} f(y) = \infty$.

Pak platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) = \infty$.

Důkaz. Mějme libovolné $K \in \mathbb{R}$. Hledáme $M \in \mathbb{R}$ takové, aby pro $x > M$ platilo $f(g(x)) > K$. Z (3) existuje $\delta > 0$ takové, že pro $y \in (A - \delta, A)$ je $f(y) > K$. Z (1) a (2) plyne, že g roste k A . Existuje tedy $M \in \mathbb{R}$ tak, že pro $x > M$ platí $g(x) \in (A - \delta, A)$. Tím pádem $f(g(x)) > K$. $\square$

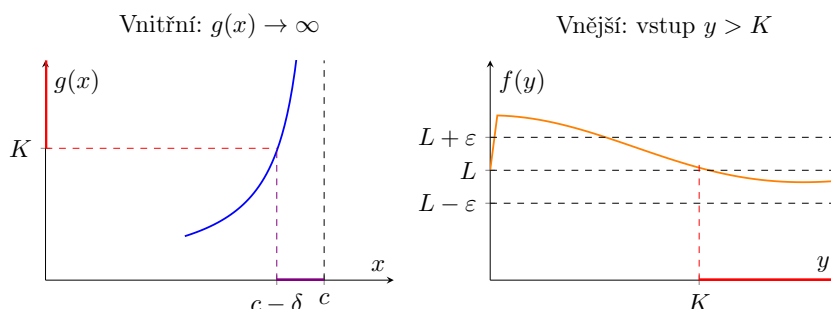


Tvrzení 2 ($x \rightarrow c^-$, nevlastní limita vnitřní funkce). *Nechť $c \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ a $A = \infty$. Předpokládejme:*

1. $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) = \infty$,
2. $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = L$.

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c^-} f(g(x)) = L$.

Důkaz. Pro libovolné okolí L existuje $K \in \mathbb{R}$ (z limity vnější funkce) takové, že pro $y > K$ je $f(y)$ blízko L . K tomuto K najdeme $\delta > 0$ (z limity vnitřní funkce) takové, že pro $x \in (c - \delta, c)$ je $g(x) > K$. Tedy $g(x)$ padne do oblasti, kde f má limitu L . $\square$

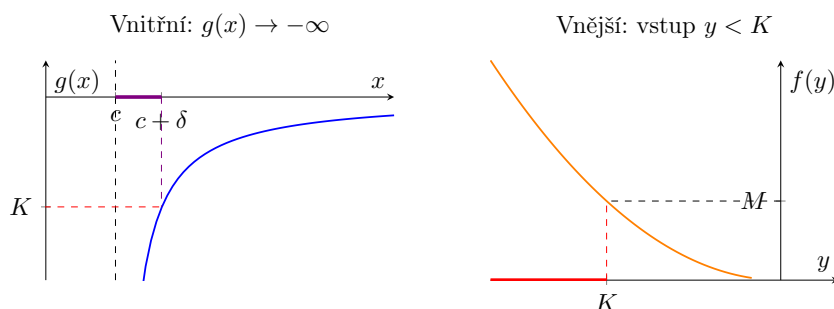


Tvrzení 3 ($x \rightarrow c^+$, nevlastní limita vnitřní funkce $-\infty$). *Nechť $c \in \mathbb{R}$, $A = -\infty$, $L = \infty$. Předpokládejme:*

1. $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) = -\infty$,
2. $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \infty$.

Pak platí $\lim_{x \rightarrow c^+} f(g(x)) = \infty$.

Důkaz. Pro libovolné M existuje $K \in \mathbb{R}$ (dostatečně malé/záporné) tak, že pro $y < K$ je $f(y) > M$. Pro toto K existuje pravé okolí c , kde $g(x) < K$. $\square$



4 Aplikace na příkladech

V následujících příkladech rozebereme limitu vnitřní funkce (g), určíme, zda se blíží k limitnímu bodu zleva či zprava (monotonie), a následně provedeme substituci ve vnější funkci (f).

4.1 Příklad 1: $f(g(x)) = \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$

Zde $g(x) = \frac{x}{x-2} = 1 + \frac{2}{x-2}$ a vnější funkce $f(y) = \arctan(y)$.

1. Limity v bodě 2:

- $x \rightarrow 2^+$: Výraz $(x-2) \rightarrow 0^+$. Tedy $g(x) \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) \xrightarrow{y=\frac{x}{x-2}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

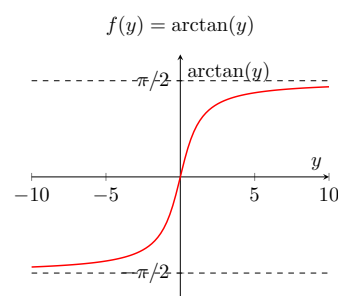
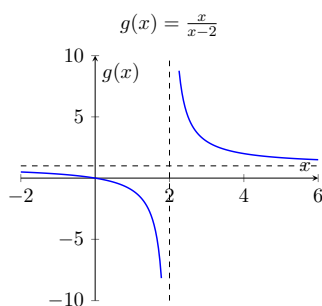
- $x \rightarrow 2^-$: Výraz $(x-2) \rightarrow 0^-$. Tedy $g(x) \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) \xrightarrow{y=\frac{x}{x-2}} \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Limity v nekonečnu:

- $x \rightarrow \pm\infty$: Platí $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-2} = 1$. Protože vnější funkce $\arctan(y)$ je **spojitá** v bodě $y = 1$, limitu vnější funkce spočítáme prostým dosazením funkční hodnoty (není třeba řešit strany).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

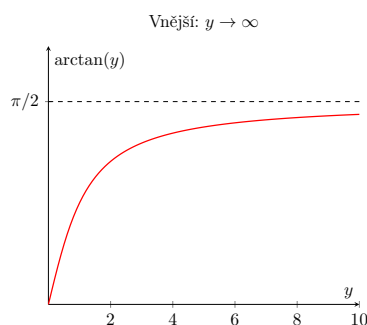
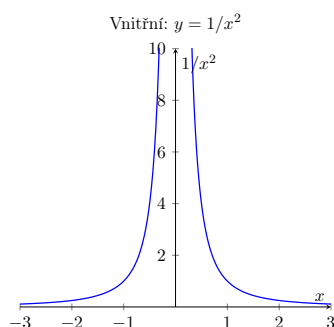


4.2 Příklad 2: $f(g(x)) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Zde $g(x) = \frac{1}{x^2}$. V bodě 0 je funkce x^2 kladná.

- $x \rightarrow 0^\pm$: Protože $x^2 \rightarrow 0^+$, platí $g(x) \rightarrow +\infty$ pro obě strany.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{y=1/x^2} \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$



4.3 Příklad 3: $f(g(x)) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Zde $g(x) = \frac{1}{x}$ a vnější funkce $f(y) = e^y$.

1. Limity v bodě 0:

- $x \rightarrow 0^+$: $1/x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} \xrightarrow{y=1/x} \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty.$$

- $x \rightarrow 0^-$: $1/x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} \xrightarrow{y=1/x} \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

2. Limity v nekonečnu:

- $x \rightarrow \pm\infty$: $1/x \rightarrow 0$. Funkce e^y je v bodě $y = 0$ **spojitá**. Limita je rovna funkční hodnotě.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

