Limita složené funkce: Od příkladů k teorii

Materiál pro studenty učitelství matematiky

Tento text ukazuje výpočet limit složených funkcí formou od konkrétních příkladů k teoretickým tvrzením. Pro úspěšný výpočet typu $\lim_{x\to c} f(g(x))$ často zavádíme substituci $y = g(x)$.

1 Příklad 1: Limita do vlastního bodu zprava

Budeme zkoumat limitu:

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

1.1 Výpočet s komentářem

Vždy, když počítáme limitu složené funkce, musíme si nejprve identifikovat vnitřní a vnější složku a začít výpočet od vnitřní funkce. Zde je vnitřní funkce $g(x) = \frac{x}{x-2}$ a vnější funkce je $f(y) = \arctan(y)$.

Nejdříve spočítáme limitu vnitřní funkce pro $x \to 2^+$. Výraz ve jmenovateli $(x-2)$ se blíží k nule z kladných hodnot (tedy 0^+), čitatel se blíží k 2. Celý zlomek tedy roste nade všechny meze, takže $g(x) \to +\infty$.

Tuto získanou hodnotu (nekonečno) nyní použijeme jako vstup (bod, ke kterému se blížíme) pro naši vnější funkci. Provedeme substituci $y = \frac{x}{x-2}$ a počítáme limitu vnější funkce:

$$\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

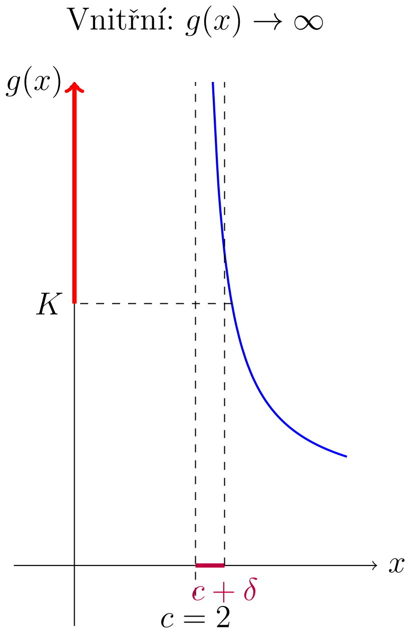
Výsledek původní limity je tedy $\frac{\pi}{2}$.

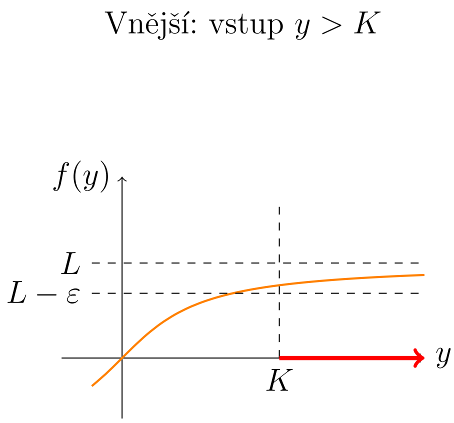
1.2 Definice limit a grafické znázornění

Pojďme si nyní situaci rozebrat formálně přes definice příslušných okolí.

- **Limita vnitřní funkce:** $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \infty$ znamená: Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (2, 2+\delta)$ platí $g(x) > K$.
- **Limita vnější funkce:** $\lim_{y\to\infty} f(y) = \frac{\pi}{2}$ znamená: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $y > K$ platí $f(y) \in (\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$.

Následující grafy ilustrují přenos okolí. Fialová barva značí okolí bodu na vstupu, červená barva pak hodnoty, které se stávají vstupem pro vnější funkci.





1.3 Tvrzení a důkaz pro tento příklad

Pro námi vypočítaný případ platí konkrétní verze věty o limitě složené funkce. Tvrzení nevyžaduje monotonii, protože limita vnitřní funkce je nevlastní.

Tvrzení 1.1 (Nevlastní limita vnitřní zprava, vlastní vnější)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že: 1. $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$, 2. $\lim_{y\to\infty} f(y) = L$. Pak platí $\lim_{x\to c^+} f(g(x)) = L$.*

Důkaz. Z definice limity vnější funkce víme, že pro libovolně malé okolí bodu L (zadané pomocí ε) existuje hranice $K \in \mathbb{R}$ taková, že jakmile je vstup $y > K$, je hodnota $f(y)$ blízko L.

Protože $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$, k tomuto konkrétnímu K dokážeme najít pravé okolí bodu c, tedy interval $(c, c+\delta)$, na kterém platí, že $g(x) > K$.

Když to složíme dohromady: vezmeme $x \in (c, c+\delta)$, z vnitřní limity vyplyne, že $g(x) > K$. Tím pádem $g(x)$ padne přesně do té oblasti, kde vnější funkce f vrací hodnoty blízko L. Tedy $\lim_{x\to c^+} f(g(x)) = L$. □

2 Příklad 2: Oboustranná limita do vlastního bodu

Budeme zkoumat limitu:

$$\lim_{x\to 0} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

2.1 Výpočet s komentářem

Vždy začínáme od vnitřní funkce, kterou je zde $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Vnější funkcí je opět $f(y) = \arctan(y)$.

Zkoumáme limitu v bodě $x \to 0$. Všimněme si, že v bodě 0 je funkce x^2 vždy kladná (pro pravé i levé okolí). Pro obě strany $x \to 0^\pm$ se jmenovatel $x^2 \to 0^+$, a proto celá vnitřní funkce roste do nekonečna: $g(x) \to +\infty$ pro obě strany.

Nyní provedeme substituci $y = \frac{1}{x^2}$ a spočítáme limitu vnější funkce pro hodnotu, ke které se vnitřní funkce přiblížila:

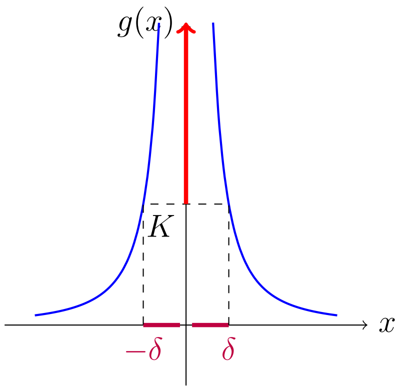
$$\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

Výsledek složené limity je tedy $\frac{\pi}{2}$.

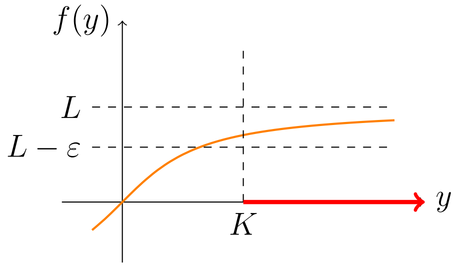
2.2 Definice limit a grafické znázornění

- **Limita vnitřní funkce:** $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ znamená: Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ existuje prstencové okolí $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, na kterém platí $g(x) > K$.
- **Limita vnější funkce:** Stejná jako v Příkladu 1.

Vnitřní: $g(x) = 1/x^2$



Vnější: vstup $y > K$



2.3 Tvrzení a důkaz pro tento příklad

Zde formulujeme tvrzení pro oboustrannou limitu, předpoklady jsou obdobné jako v Příkladu 1, ale pracujeme s oboustranným prstencovým okolím.

Tvrzení 2.1 (Nevlastní oboustranná limita vnitřní, vlastní vnější)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že: 1. $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, 2. $\lim_{y\to\infty} f(y) = L$. Pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = L$.*

Důkaz. Z vnější limity najdeme ke zvolenému ε-okolí bodu L odpovídající hranici K, tak aby pro $y > K$ platilo, že $f(y)$ je blízko L. K tomuto K následně z definice vnitřní limity zaručeně najdeme prstencové okolí bodu c, tedy $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$, kde hodnoty $g(x) > K$. Substitucí $y = g(x)$ získáváme požadované hodnoty na vstupu do $f(y)$ a důkaz je hotov. $\square$

3 Příklad 3: Limita do vlastního bodu zleva

Budeme zkoumat limitu:

$$\lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.1 Výpočet s komentářem

Znovu postupujeme zevnitř: vnitřní funkce je $g(x) = \frac{1}{x}$ a vnější funkce je $f(y) = e^y$.

Zajímá nás limita pro $x \to 0^-$. Výraz $\frac{1}{x}$ se blíží k nule přes záporné hodnoty, jmenovatel je tedy záporný a blízko nule. Výsledek zlomku roste do záporného nekonečna, takže $\frac{1}{x} \to -\infty$.

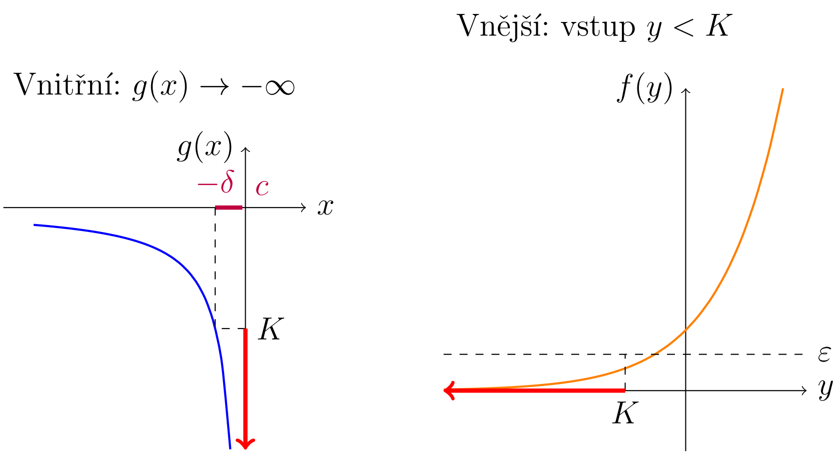
S využitím substituce $y = \frac{1}{x}$ přistoupíme k výpočtu vnější limity pro $y \to -\infty$:

$$\lim_{y\to -\infty} e^y = 0$$

Výsledek je tedy 0.

3.2 Definice limit a grafické znázornění

- **Limita vnitřní funkce:** $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ znamená: Pro libovolné malé záporné $K \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ tak, že na levém okolí $(-\delta, 0)$ platí $g(x) < K$.
- **Limita vnější funkce:** $\lim_{y\to -\infty} e^y = 0$ znamená: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro $y < K$ platí $0 < e^y < \varepsilon$.



3.3 Tvrzení a důkaz pro tento příklad

Tvrzení 3.1 (Nevlastní limita vnitřní zleva $-\infty$, vlastní vnější)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že: 1. $\lim_{x\to c^-} g(x) = -\infty$, 2. $\lim_{y\to -\infty} f(y) = L$. Pak platí $\lim_{x\to c^-} f(g(x)) = L$.*

Důkaz. Pro libovolné malé okolí limitní hodnoty L najdeme $K \in \mathbb{R}$ (dostatečně velké v záporných číslech) z limity vnější funkce tak, že pro všechna $y < K$ jsou hodnoty $f(y)$ v požadovaném okolí L.

Díky tomu, že limita vnitřní funkce je $-\infty$, existuje k tomuto zápornému K levé okolí $(c - \delta, c)$, na kterém hodnoty $g(x)$ splňují $g(x) < K$. Substitucí se opět bezpečně dostáváme do oblasti, kde $f(y)$ míří k L. □

4 Příklad 4: Limita v nevlastním bodě (v nekonečnu)

Budeme zkoumat limitu:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

4.1 Výpočet s komentářem

Znovu začínáme identifikací funkcí. Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{x}{x-2}$ a vnější funkce je $f(y) = \arctan(y)$.

Nejprve spočítáme limitu vnitřní funkce pro $x \to \infty$. Pro výpočet limity racionální lomené funkce v nekonečnu můžeme čitatele i jmenovatele vydělit nejvyšší mocninou x, nebo si výraz upravit na tvar $1 + \frac{2}{x-2}$. Když se x blíží do nekonečna, zlomek $\frac{2}{x-2}$ se blíží k nule. Celá vnitřní funkce se tedy blíží k 1: $g(x) \to 1$.

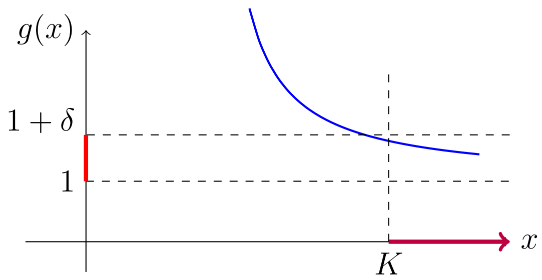
Získanou hodnotu $y = 1$ nyní použijeme pro výpočet limity vnější funkce. Všimněme si, že vnější funkce $\arctan(y)$ je v bodě $y = 1$ spojitá. Díky této spojitosti nemusíme řešit, zda se k jedničce blížíme zprava nebo zleva, a limitu vnější funkce spočítáme prostým dosazením funkční hodnoty:

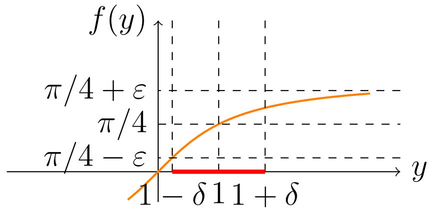
$$\lim_{y\to 1} \arctan(y) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Výsledek původní limity je tedy $\frac{\pi}{4}$.

4.2 Definice limit a grafické znázornění

- **Limita vnitřní funkce:** $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$ znamená: Pro libovolně malé okolí bodu 1 (určené poloměrem $\delta > 0$) existuje hranice $K \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x > K$ platí $g(x) \in (1-\delta, 1+\delta)$. V našem případě se hodnoty blíží dokonce jen shora, platí tedy $g(x) \in (1, 1+\delta)$.
- **Spojitost vnější funkce:** Spojitost $f(y)$ v bodě $y = 1$ znamená, že $\lim_{y\to 1} f(y) = f(1)$. Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro vstup $y \in (1-\delta, 1+\delta)$ leží funkční hodnoty $f(y)$ v okolí $(\frac{\pi}{4} - \varepsilon, \frac{\pi}{4} + \varepsilon)$.





4.3 Tvrzení a důkaz pro tento příklad

Následující tvrzení využívá toho, že pokud je vnější funkce spojitá v limitním bodě vnitřní funkce, je výpočet složené limity velmi přímočarý (odpadá nutnost zkoumat monotonii vnitřní funkce nebo její vyhnutí se limitě).

Tvrzení 4.1 (Vlastní limita vnitřní funkce v nekonečnu, spojitá vnější)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že:*

1. $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$,
2. *funkce $f(y)$ je spojitá v bodě c.*

Pak platí $\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = f(c)$.

Důkaz. Ze spojitosti vnější funkce f v bodě c vyplývá, že k libovolnému okolí funkční hodnoty $f(c)$ (určenému $\varepsilon > 0$) dokážeme najít okolí bodu c (určené poloměrem $\delta > 0$) takové, že pokud $y \in (c-\delta, c+\delta)$, pak se $f(y)$ od $f(c)$ liší o méně než ε.

Protože pro vnitřní funkci platí $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$, dokážeme k tomuto konkrétnímu δ najít hranici $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x > K$ padnou hodnoty $g(x)$ do intervalu $(c-\delta, c+\delta)$.

Složením obou kroků dostáváme, že pro $x > K$ je $g(x)$ v δ-okolí bodu c, a proto hodnota složené funkce $f(g(x))$ spolehlivě padne do ε-okolí bodu $f(c)$. Tím je věta dokázána. □

5 Příklad 5: Limita do vlastního bodu zprava s nevlastním výsledkem

Budeme zkoumat limitu:

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

5.1 Výpočet s komentářem

Opět začínáme identifikací funkcí. Vnitřní funkce je $g(x) = \frac{1}{x}$ a vnější funkce je $f(y) = e^y$.

Nejdříve spočítáme limitu vnitřní funkce pro $x \to 0^+$. Protože se k nule blížíme zprava (tedy přes kladná čísla), jmenovatel x je kladný a velmi malý. Hodnota celého zlomku $\frac{1}{x}$ tedy roste nade všechny meze do kladného nekonečna: $g(x) \to +\infty$.

Získanou hodnotu (nekonečno) použijeme pro substituci $y = \frac{1}{x}$ a počítáme limitu vnější funkce pro $y \to +\infty$:

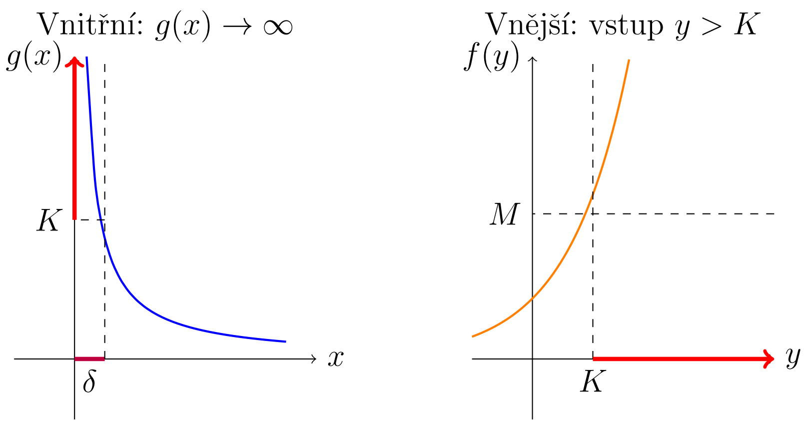
$$\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

Výsledek složené limity je tedy nevlastní, rovná se $+\infty$.

5.2 Definice limit a grafické znázornění

V tomto případě se obě limity týkají nekonečna, formalizujeme je takto:

- **Limita vnitřní funkce:** $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ znamená: Pro libovolně velkou hranici $K \in \mathbb{R}$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in (0, \delta)$ na pravém okolí nuly platí $g(x) > K$.
- **Limita vnější funkce:** $\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$ znamená: Pro libovolně velkou cílovou hranici $M \in \mathbb{R}$ existuje vstupní hranice $K \in \mathbb{R}$ taková, že jakmile je vstup $y > K$, platí pro funkční hodnoty $f(y) > M$.



5.3 Tvrzení a důkaz pro tento příklad

Zde formulujeme tvrzení pro složení dvou nevlastních limit.

Tvrzení 5.1 (Nevlastní limita vnitřní zprava, nevlastní vnější)**.** *Nechť $c \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že: 1. $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$, 2. $\lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$. Pak platí $\lim_{x\to c^+} f(g(x)) = \infty$.*

Důkaz. Chceme ukázat, že pro libovolně velkou hranici $M \in \mathbb{R}$ dokážeme najít pravé okolí bodu c, na kterém bude $f(g(x)) > M$.

Z definice vnější limity $\lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$ víme, že k tomuto zvolenému M existuje hranice $K \in \mathbb{R}$ taková, že jakmile je vstup $y > K$, pak $f(y) > M$.

Nyní využijeme vnitřní limitu $\lim_{x\to c^+} g(x) = \infty$. K nalezenému K musí existovat pravé okolí bodu c, tedy interval $(c, c+\delta)$, na kterém platí $g(x) > K$.

Když tyto dva kroky spojíme: pro libovolné $x \in (c, c+\delta)$ platí, že $g(x) > K$. Tuto hodnotu dosadíme jako y do vnější funkce, a protože je větší než K, zaručeně platí $f(g(x)) > M$. Tím jsme dokázali, že i složená funkce roste nade všechny meze. $\square$