

Sbírka příkladů na výpočet limit

Tuto sbírku vygeneroval velký jazykový model gemini od společnosti Google.

1. Příklady s podrobným řešením

Příklad A: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

- **Analýza:** Po dosazení dostáváme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Použijeme kombinaci substituce a aritmetiky limit.
- **Řešení:**
 1. Výraz upravíme, abychom mohli využít známé limity: $\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin(2x)}$.
 2. Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
 3. Pro druhou část použijeme substituci $y = 2x$. Protože $x \rightarrow 0$, pak i $y \rightarrow 0$ a podmínka $g(x) \neq 0$ je na $P(0)$ splněna.
 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.
 5. Podle aritmetiky vlastních limit: $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Příklad B: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)}$

- **Analýza:** Typ $\frac{\infty}{\infty}$. L'Hospitalovo pravidlo zde selže, protože limita derivací neexistuje. Použijeme větu o sevřené funkci.
- **Řešení:**
 1. Vytkneme x z čitatele i jmenovatele: $\frac{x(1 + \frac{\sin x}{x})}{x(1 - \frac{\sin x}{x})} = \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$.
 2. Pomocí věty o sevřené funkci víme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
 3. Dosadíme pomocí aritmetiky limit: $\frac{1+0}{1-0} = 1$.

2. Příklady se stručným řešením

Příklad C: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot e^{1/x}$

- **Stručné řešení:** Jde o typ $0 \cdot \infty$. Převědeme na podíl $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x^2}$ (typ $\frac{\infty}{\infty}$). Použijeme substituci $y = 1/x$ ($y \rightarrow \infty$), čímž dostaneme $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2y} \stackrel{L'H}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2} = \infty$.

Příklad D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2 + 1}$

- **Stručné řešení:** Typ $\frac{\infty}{\infty}$. Použijeme L'Hospitalovo pravidlo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

3. Příklady k procvičení (bez řešení)

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

Nápověda: Použijte rovnost na prstencovém okolí po rozšíření výrazu.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$

Nápověda: L'Hospitalovo pravidlo dvakrát po sobě.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x+2^x}{3^{x+1}-2^{x+1}}$

Nápověda: Aritmetika nevlastních limit po vytknutí nejrychleji rostoucího členu.

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Nápověda: Věta o sevřené funkci.

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$

Nápověda: Substituce $y = x - 1$ nebo L'Hospitalovo pravidlo.