

Sbírka příkladů: Výpočet limit

Doplňkový materiál k přehledu nástrojů

Úvod a použité značení

Tato sbírka příkladů navazuje na studijní materiál *Nástroje pro výpočet limit*. U řešených příkladů odkazujeme na konkrétní nástroje pomocí následujících zkratek:

- [S] Spojitost funkce
 - [P] Rovnost na prstencovém okolí
 - [AL] Aritmetika vlastních limit
 - [AL*] Aritmetika nevlastních limit (operace s ∞)
 - [L/0+] Typ $L/0$, kde jmenovatel je kladný
 - [VSF] Věta o sevřené funkci
 - [0. 0M] Součin nulové a omezené funkce
 - [L'H] L'Hospitalovo pravidlo
 - [LSF] Limita složené funkce
 - [MON] Limita monotonní funkce
-

1 Řešené příklady

V této části je u každého kroku uveden odkaz na příslušný nástroj.

Příklad 1. Vypočtete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$$

Řešení:

Po dosazení $x = 1$ dostáváme neurčitý výraz „0/0“. Nemůžeme ihned použít [AL].

(a) Rozložíme čitatele i jmenovatele na součin kořenových činitelů:

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 3)}$$

(b) Využijeme nástroj [P]. Pro všechna $x \neq 1$ (tedy na prstencovém okolí $P(1)$) platí:

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x + 1}{x + 3}$$

(c) Nyní počítáme limitu zjednodušené funkce s využitím [AL] a [S]:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} \stackrel{[AL]}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)} \stackrel{[S]}{=} \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Výsledek: $1/2$

Příklad 2. Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^x)}{x}$$

Řešení:

- (a) Výraz přepíšeme jako součin: $\frac{1}{x} \cdot \sin(e^x)$.
- (b) Analyzujeme první část: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ (dle [AL*] a tabulky dělení $\frac{L}{\infty} = 0$).
- (c) Analyzujeme druhou část: Funkce $f(x) = \sin(e^x)$ sice nemá v nekonečnu limitu (osciluje), ale je **omezená** na celém $\mathbb{R}$, protože $|\sin(y)| \leq 1$.
- (d) Použijeme nástroj [0. 0M]: Protože jedna funkce jde k nule a druhá je omezená, limita součinu je 0.

Výsledek: 0

Příklad 3. Vypočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$$

Řešení:

V exponentu máme typ $-1/0$. Musíme rozlišit, zda jde o 0^+ nebo 0^- , proto vyšetříme jednostranné limity.

a) Limita zprava ($x \rightarrow 0^+$):

- Vnitřní funkce $g(x) = -\frac{1}{x}$. Pro $x \rightarrow 0^+$ jde o typ „ $-1/0^+$ “, což je $-\infty$ (dle [L/0+]).
- Vnější funkce $f(y) = e^y$. Pro $y \rightarrow -\infty$ je $\lim e^y = 0$ (dle [MON]).
- Dle [LSF] a [AL]: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{-1/x}) = 1 + 0 = 1$.
- Celková limita zprava: $1/1 = 1$.

b) Limita zleva ($x \rightarrow 0^-$):

- Vnitřní funkce $g(x) = -\frac{1}{x}$. Pro $x \rightarrow 0^-$ jde o typ „ $-1/0^-$ “, což je $+\infty$.
- Vnější funkce $e^y \rightarrow \infty$ pro $y \rightarrow \infty$.
- Jmenovatel jde k $1 + \infty = \infty$ (dle [AL*]).
- Celkový zlomek je typu $\frac{1}{\infty}$, což je 0.

Protože $1 \neq 0$, oboustranná limita neexistuje.

2 Příklady se stručným návodem

Zkuste příklady vyřešit sami, návod vám napoví správný nástroj.

Příklad 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Návod: Typ 0/0. Použijte [L'H]. Derivace čitatele je $e^x - 1$, jmenovatele $2x$. Získáte novou limitu, která je opět 0/0. Aplikujte [L'H] podruhé nebo využijte známou limitu $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$.

Výsledek: 1/2

Příklad 5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

Návod: Vytkněte x v čitateli i jmenovateli (úprava [P]). Dostanete $\frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}}$. Na zlomky $\frac{\sin x}{x}$ a $\frac{\cos x}{x}$ použijte [VSF] nebo [0. OM].

Výsledek: 1

Příklad 6.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)^2}$$

Návod: Čítec jde k 2 ($L = 2$). Jmenovatel jde k 0. Protože $(x - 2)^2 \geq 0$ na celém $P(2)$, jmenovatel je vždy kladný. Jedná se o typ [L/0+]. Výsledek je $\text{sgn}(2) \cdot \infty$.

Výsledek: ∞

3 Příklady k procvičení

Příklady pro samostatnou práci bez uvedeného řešení.

Příklad 7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + x}{x^2 + 10}$$

Příklad 8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \cos \left(\frac{1}{\sqrt{|x|}} \right)$$

Příklad 9.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Příklad 10.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

Příklad 11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$