# Sbírka příkladů: Newtonův určitý integrál

Materiál pro studenty učitelství matematiky[1]

## 1 Rozcvička a přímá aplikace vzorce

Tato část slouží k zopakování Newton-Leibnizovy formule: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Žáci zde trénují základní tabulkové integrály a práci se zlomky či odmocninami.

### Příklad 1.1: Polynomická funkce

Vypočtěte:

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**

$$\left[x^3 - x^2 + x\right]_1^2 = (8 - 4 + 2) - (1 - 1 + 1) = 6 - 1 = 5$$

**Metodická poznámka:** Učitel by měl dbát na to, aby žáci důsledně používali závorky při odečítání dolní meze $F(a)$. Ztráta znaménka je zde nejčastější numerickou chybou.

### Příklad 1.2: Goniometrické funkce

Vypočtěte:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**

$$\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin(0) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

**Metodická poznámka:** Příklad testuje nezapomenutí na vnitřní derivaci (respektive na konstantu $\frac{1}{2}$ pocházející z lineární substituce $t = 2x$).

## 2 Metoda per partes a substituce

V určitém integrálu mají tyto metody svá specifika, zejména nutnost měnit integrační meze při substituci.

### Příklad 2.1: Per partes v určitém integrálu

Vypočtěte:

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**

Zvolíme $u = x \implies u' = 1$ a $v' = e^x \implies v = e^x$.

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$$

[1] Sbírku vytvořil LLM Gemini na základě promptu: Vytvoř sbírku příkladů na Newtonův určitý integrál pro studenty učitelství matematiky.

### Příklad 2.2: Substituce se změnou mezí

Vypočtěte:

$$\int_0^2 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**
Zavedeme substituci $t = x^2 + 1$. Pak $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$.
Nové meze: pro $x = 0$ je $t = 1$; pro $x = 2$ je $t = 5$.

$$\int_1^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^5 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^5 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

> **Metodická poznámka:** Přechod na nové meze je pro žáky často matoucí. Učitel by měl zdůraznit, že díky změně mezí se na konci výpočtu už **nemusíme** vracet k původní proměnné $x$, což výpočet značně urychluje a zkracuje zápis.

## 3 Vlastnosti integrálu (Zjednodušení práce)

Dobře položený příklad odmění studenty, kteří přemýšlejí o geometrii a vlastnostech funkcí, místo aby jen slepě integrovali.

### Příklad 3.1: Symetrie intervalu a lichá funkce

Vypočtěte:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**
Funkce $f(x) = x^3\cos(x)$ je lichá, protože $f(-x) = (-x)^3\cos(-x) = -x^3\cos(x) = -f(x)$. Interval integrace $\langle -\pi, \pi\rangle$ je symetrický podle počátku. Integrál liché funkce na symetrickém intervalu je roven nule. Výsledek je tedy 0.

> **Metodická poznámka:** Pokud student začne příklad řešit trojnásobným použitím metody per partes, stráví na něm 15 minut a pravděpodobně udělá numerickou chybu. Učitel by zde měl demonstrovat sílu teoretických znalostí nad pouhým „počtářstvím“.

## 4 Didaktické chytáky a úskalí (Problémové úlohy)

Tato sekce je pro budoucí učitele stěžejní. Ukazuje situace, kdy mechanická aplikace vzorce vede k absurdním výsledkům.

### Příklad 4.1: Práce s absolutní hodnotou

Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou $x$ a grafem funkce $f(x) = |x| - 1$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. (Tj. řešte integrál absolutní hodnoty).

$$\int_{-2}^{2} (|x| - 1)\,\mathrm{d}x$$

**Řešení:**
Funkci je nutné rozdělit podle nulového bodu absolutní hodnoty ($x = 0$):

$$\int_{-2}^{0} (-x-1)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$$

Z důvodu sudosti funkce si můžeme práci zjednodušit jako:

$$2 \cdot \int_0^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = 2 \cdot (2-2) = 0$$

### Příklad 4.2: Klasická „žákovská“ chyba (Bod nespojitosti)

Kriticky zhodnoťte následující výpočet:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = (-1) - (1) = -2$$

**Řešení a rozbor:**
Výpočet je **chybný**. Funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je na celém svém definičním oboru kladná, proto nemůže být integrál (vyjadřující obsah plochy pod křivkou) záporný.

Chyba spočívá v nerespektování předpokladů Newton-Leibnizovy formule: Funkce **není spojitá** na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, má singularitu v bodě $x = 0$. V klasickém smyslu Riemannova/Newtonova integrálu zde integrál neexistuje (jedná se o divergentní nevlastní integrál).

> **Metodická poznámka:** Tento příklad by měl každý budoucí učitel znát zpaměti. Je to nejlepší demonstrace toho, proč se na začátku každé věty v analýze učí předpoklady („Nechť je funkce spojitá na uzavřeném intervalu...“). Pokud se předpoklady neověří, matematika dává nesmyslné výsledky.