

Nekonečné číselné řady

(Od intuice k rigorózní teorii)

5. března 2026

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Cílem této kapitoly je vybudovat spolehlivou intuici i přesný formální aparát pro zkoumání nekonečných součtů.

1 Motivace: Kde potkáme nekonečno?

Než přistoupíme k formálnímu výkladu, ukažme si několik situací, kde se s myšlenkou nekonečného součtu přirozeně setkáváme. Tyto příklady nám pomohou budovat intuici o tom, kdy má smysl nekonečně mnoho čísel sečíst.

- **Magie čísel:** Je $0,\bar{9}$ opravdu 1? Žáci to často odmítají přijmout. Můžeme jim to však názorně ukázat pomocí nekonečného sčítání: $0,\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$
- **Dávkování léků:** Pacient bere každých 8 hodin 100 mg léku, přičemž tělo část odbourá. Poroste množství látky v těle do nekonečna (otrava), nebo se ustálí? Součet nekonečně mnoha zbytkových dávek nám dá odpověď.

2 Základní pojmy: Posloupnost vs. Řada

Základní poznatek

Mějme posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. **Posloupností částečných součtů** (s_n) rozumíme:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, říkáme, že **řada konverguje** a její součet je s . Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. V opačném případě řada **diverguje**.

Didaktická poznámka / Pohled učitele

Metafora hromady písku:

Studentům se pojmy pletou. Představte si, že stavíte hromadu z písku.

- **Posloupnost** a_n odpovídá tomu, *kolik písku přisypu* v n -tém kroku.
- **Částečný součet** s_n je, *jak velká je hromada* po n krocích.

Konvergence znamená, že i když sypeme donekonečna, hromada nepřeroste určitou výšku. Nutnou podmínkou pochopitelně je, že velikost přidávaných lopatek písku se musí zmenšovat k nule ($\lim a_n = 0$).

3 Geometrická řada: Základní kámen

Geometrická řada je nejzákladnějším typem konvergentní řady. Každý další člen získáme vynásobením předchozího konstantou q (kvocient).

Základní poznatek

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$. Její součet je pak dán vzorcem:

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

Pro $|q| \geq 1$ řada diverguje (nebo osciluje).

4 Varovné příklady: Proč selský rozum nestačí

Uvažujme Grandiho řadu: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Jaký je její součet?

- Uzávorkujeme: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$.
- Uzávorkujeme jinak: $1 - (1 - 1) - (1 - 1) \dots = 1 - 0 - 0 \dots = 1$.

Didaktická poznámka / Pohled učitele

Toto je silný moment pro vaši výuku! Výše uvedený spor ukazuje, že **nekonečno není číslo**. S nekonečnými součty nelze automaticky provádět běžné algebraické úpravy (jako je asociativní zákon), na které jsme zvyklí z konečné matematiky. Proto potřebujeme formální kritéria konvergence.

5 Harmonická řada: Nenápadná exploze

Ačkoliv platí nutná podmínka konvergence ($\lim \frac{1}{n} = 0$), součet převrácených hodnot přirozených čísel roste do nekonečna.

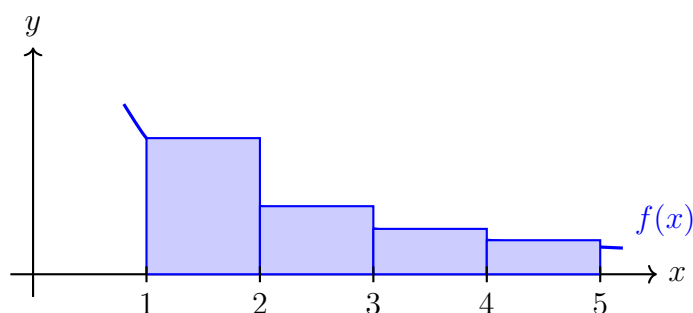
Divergence harmonické řady

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ je **divergentní**. Její součet je $+\infty$.

6 Řady s nezápornými členy a kritéria konvergence

Zde zkoumáme, jak rychle se sčítance blíží k nule. Nejznámějšími nástroji jsou podílové (d'Alembertovo) a odmocninové (Cauchyho) kritérium, která v jádru pouze srovnávají naši řadu s řadou geometrickou.

Velmi názorné je **Integrální kritérium**.

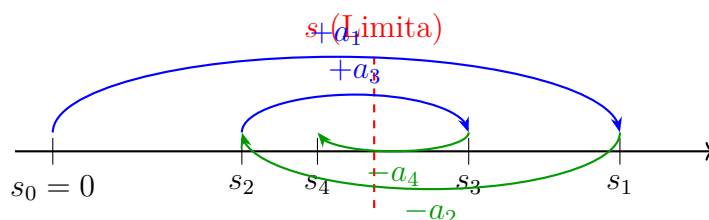


Didaktická poznámka / Pohled učitele

Z obrázku je ihned vidět podstata integrálního kritéria. Obsah obdélníčků (členů řady) zjevně souvisí s plochou pod grafem spojité funkce. Pokud zintegrujeme klesající funkci do nekonečna a vyjde konečné číslo, musí být konečný i součet řady (a naopak).

7 Alternující řady: Leibnizovo kritérium

Pokud řada pravidelně střídá znaménka (např. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$), její konvergenci zaručuje Leibnizovo kritérium.



Metafora skákající žáby

Představte si žábu sedící v počátku číselné osy. Střídání znamének znamená, že skáče doprava, pak doleva, pak doprava... Pokud se délka jejích skoků neustále zmenšuje (monotónně) a limitně se blíží k nule, žába nemá jinou možnost, než se postupně „usadit“ v jednom konkrétním bodě. To je přesný mechanismus Leibnizova kritéria!

8 Absolutní a relativní konvergence

Základní poznatek

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, pokud konverguje řada jejích absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Konverguje-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ale nekonverguje absolutně, říkáme, že konverguje **relativně (neabsolutně)**.

9 Přerovnávání řad: Riemannova věta

Zde přichází jeden z nejvíce šokujících poznatků vysokoškolské matematiky, který ukazuje křehkost nekonečna.

Riemannova věta (Rozbití komutativity)

Základní škola nás učí, že $a+b = b+a$. U absolutně konvergentních řad (stabilních) to platí i pro nekonečno členů. Avšak **neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat tak, aby její součet bylo jakékoliv reálné číslo**, případně aby divergovala! Důvodem je, že taková řada obsahuje dostatek kladných členů na to, abychom z nich „nasčítali nekonečno“, a dostatek záporných na totéž. Vhodným výběrem (např. vezmu 10 kladných, 1 záporný, 10 kladných...) můžeme limitu manipulovat dle libosti.

10 Krása a síla řad

K čemu to celé je? Aparát řad nám otevírá dveře k definicím a výpočtům funkcí.

Známé součty a Taylorovy řady

Díky mocninným řadám nepotřebují kalkulačky složité tabulky pro výpočet goniometrických funkcí. Euler a Leibniz nám zanechali krásné vzorce:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{propojení celých čísel a kruhu!})$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad (\text{Basilejský problém})$$