Obsah

Kapitola 1

Řady

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem časová řada ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy geometrická posloupnost, geometrická řada, aritmetická posloupnost, aritmetická řada. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, tedy součet.

Než přistoupíme k formálnímu výkladu (který začneme desetinným rozvojem reálných čísel a převedením periodického rozvoje na zlomek), ukažme si několik situací z reálného světa, kde se s myšlenkou nekonečného součtu přirozeně setkáváme. Tyto příklady nám pomohou budovat intuici o tom, kdy má smysl nekonečně mnoho čísel sečíst a kdy to naopak vede k „explozi“ nebo zmatku.

1.1 Motivace: Kde všude v reálném světě potkáme nekonečno?

1. Magie čísel a školská praxe: Je $0,\overline{9}$ opravdu 1?

Jedna z nejčastějších otázek zvídavých žáků zní: *Jak může být číslo, které začíná nulou, rovno jedné?* Žáci často odmítají přijmout fakt, že $0,\overline{9} = 1$. Můžeme jim to však názorně ukázat pomocí nekonečného sčítání (nekonečné geometrické řady):

$$0,\overline{9} = 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Právě studium řad nám v následujících kapitolách dá do ruky silný nástroj, jak dokázat, že tento součet skutečně konverguje přesně k hodnotě 1.

2. Finanční gramotnost: Perpetuita a složené úročení

Pokud si budeme každý měsíc ukládat 1 000 Kč na účet s garantovaným úrokem, tvoří naše vklady a jejich úročení posloupnost. Co kdybychom však chtěli dostávat stabilní rentu „navždy“ (tzv. perpetuita)? Jakou hodnotu má takový slib dnes? Výpočet současné hodnoty budoucích nekonečných výnosů vede přímo na součet nekonečné geometrické řady:

$$S = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots$$

kde R je renta a i je úroková míra. Bez znalosti řad by moderní finanční matematika nemohla fungovat.

3. Fyzika a sport: Dráha skákajícího míčku

Pustíme gumový míček z výšky 1 metru. Po každém dopadu ztratí část své kinetické energie a vyskočí jen do 80 % předchozí výšky. Kolikrát se odrazí, než se úplně zastaví? Teoreticky nekonečněkrát. Jakou ale urazí celkovou dráhu? Dráha se skládá z letu dolů a nahoru:

$$s = 1 + 2 \cdot (0{,}8) + 2 \cdot (0{,}8^2) + 2 \cdot (0{,}8^3) + \dots$$

Ačkoliv proces obsahuje nekonečně mnoho kroků, celková dráha je konečná (řada konverguje). Toto je klasická ukázka toho, že nekonečno nemusí nutně znamenat „nekonečně velký výsledek“.

4. Lékařství: Dávkování léků v těle

Pacient dostane 100 mg léku. Během 8 hodin tělo odbourá 40 % účinné látky (zůstane 60 %). Za 8 hodin si pacient vezme dalších 100 mg. Pokud bude pacient brát léky dlouhodobě, poroste množství látky v těle do nekonečna (a dojde k otravě), nebo se ustálí na nějaké bezpečné hladině? Množství látky v těle těsně po podání n-té dávky tvoří částečný součet řady:

$$100 + 100 \cdot 0{,}6 + 100 \cdot 0{,}6^2 + \dots + 100 \cdot 0{,}6^{n-1}$$

Díky tomu, že kvocient je menší než 1, hladina léku v těle se ustálí.

5. Architektura a hlavolamy: Věž z knih

Představte si hromadu stejných učebnic. Chcete je vyskládat na sebe tak, aby horní kniha přečnívala co nejdále za hranu stolu, ale aby věž nespadla. Lze posunout těžiště tak, aby horní kniha byla úplně celá mimo stůl? A šlo by to posunout až na druhou stranu místnosti? Fyzikální rozbor posunů těžiště nás přivede k řadě:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

Výraz v závorce je tzv. **harmonická řada**. Jak si později ukážeme, tato řada *diverguje* (její součet roste nade všechny meze). Překvapivá odpověď tedy zní: s dostatečným počtem knih postavíte most klidně přes celý oceán!

6. Záludný vypínač a klamy nekonečna (Grandiho řada)

Máte vypínač. Zmáčknutí znamená $+1$ (světlo), další zmáčknutí -1 (tma). Začnete s nulou a mačkáte donekonečna:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Bude na konci rozsvíceno, nebo zhasnuto? Pokud bychom použili neopatrné uzávorkování, mohli bychom tvrdit, že součet je $(1-1)+(1-1)+\dots = 0$. Jiné uzávorkování $1-(1-1)-(1-1)\dots$ dává 1. Tento příklad slouží jako důležité varování (kterému se budeme věnovat v kapitole 1.4): **s nekonečnem nelze provádět běžné algebrické úpravy tak, jak jsme zvyklí u konečných součtů**.

Úlohy k zamyšlení

1. **Rozpoznání řady:** Pozorně si prohlédněte příklady 2, 3 a 4. Zkuste pro každý z nich určit, jaký je kvocient q příslušné geometrické řady.
2. **Řady ve vašem světě (Tvořivá úloha):** Vymyslete reálnou situaci z oblasti vašeho zájmu (může to být jiný studijní obor, sport, koníček nebo specifický pedagogický problém), která se dá modelovat pomocí matematické řady.

- Popište situaci: Co přesně představují jednotlivé sčítance a_k?
- Dává ve vašem modelu smysl uvažovat o řadě konečné, nebo nekonečné?
- Zkuste odhadnout (intuitivně nebo matematicky), zda vaše řada konverguje (blíží se k limitní hodnotě), diverguje (roste do nekonečna), nebo osciluje. Dává tento matematický výsledek smysl i v kontextu vaší reálné situace?