

Úlohy na součty nekonečně mnoha čísel

3. března 2026

Prvních pět úloh je určeno k procvičení textu na stranách 157 – 160 z https://kma.fp.tul.cz/~simunkova/analyza/Ucebni_text.pdf

Další úlohy jsme vytvořili ve spolupráci s velkým jazykovým modelem gemini pro.

Na přednášce úlohy projdeme, přesto jim prosím věnujte pozornost, ideálně je vyřešte, již před přednáškou.

1. Převed'te na podíl celých čísel periodický desetinný rozvoj $a = 1.0\overline{3} = 1.033333\ldots$

2* Převed'te na podíl celých čísel periodický binární (tj. dvojkový) rozvoj čísla $b = 1.1\overline{0} = 1.101010\ldots$

3. Vyčíslete devátý člen řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3k$$

4. Vyčíslete třetí částečný součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3k$$

5* Vyčíslete stý částečný součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3k$$

6. Grandiho řada (Motivace pro formální definici)

Představte si řadu $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Jaký je její celkový součet? Podívejte se na následující tři „logické“ postupy:

- **Postup A:** $(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 = 0$
- **Postup B:** $1 - (1 - 1) - (1 - 1) \cdots = 1 - 0 - 0 = 1$
- **Postup C:** Pokud součet označíme S , platí $S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 \ldots) = 1 - S$. Tedy $2S = 1$, z čehož $S = \frac{1}{2}$.

Který výsledek je podle vás „nejspравnějši“ a proč? Co nám tento příklad říká o samotném konceptu sčítání nekonečného počtu čísel?

7. Vizuální pojetí geometrické řady (Propojení geometrie a algebry)

Nakreslete čtverec, obdélník či kruh o obsahu 1. Rozpulte ho. Jednu polovinu vybarvěte, druhou znovu rozpulte. Z té novou polovinu (tedy čtvrtinu celku) vybarvěte, zbylou část opět rozpulte. Udělejte ještě několik takových kroků a představte si, že takto pokračujeme do nekonečna.

- Napište součet (konečnou řadu), který popisuje obsah obrazce vybarveného po n rozpůleních. Nejdříve pro $n = 3, 8, 20$ a poté pro obecné n .
- Jaký bude celkový vybarvený obsah, pokud tento proces zopakujeme nekonečněkrát? Zdůvodněte bez použití vzorce pro součet geometrické řady.

8. Zrádná intuice (Divergence vs. Konvergence)

Uvažujme dvě řady:

- **Řada A:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- **Řada B:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Rozhodněte (nebo si tipněte), zda se součty těchto řad blíží k nějakému konkrétnímu konečnému číslu, nebo zda rostou do nekonečna. U které z nich jste si jistější a proč?

9. Teleskopický trik (Analytická dovednost)

Vypočítejte součet prvních 10ti členů a následně celkový součet nekonečné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nápověda: Výpočet je možné zjednodušit rozložením členu na $\frac{1}{n(n+1)}$ na součet partiálních zlomků.

10. Iluze konečného součtu (Kdy vzorce lžou)

Uvažujme nekonečnou geometrickou řadu a předpokládejme, že má konečný součet s :

$$s = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots$$

Vynásobme celou rovnici číslem $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2}s = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots$$

Můžeme si všimnout, že pravá strana rovnice je přesně naše původní řada s , které pouze chybí první člen (jednička). Můžeme ji tedy nahradit výrazem $s - 1$:

$$\frac{3}{2}s = s - 1$$

Odečtením s z obou stran získáme $\frac{1}{2}s = -1$, z čehož plyne výsledek $s = -2$. Součet nekonečně mnoha kladných čísel nám vyšel jako záporné číslo. Kde se v našem na první pohled logickém postupu stala chyba?

11. Nekonečná dráha skákajícího míčku (Fyzikální aplikace)

Představte si, že pustíme gumový míček z výšky 2 metrů na pevnou podlahu. Po každém dopadu se míček odrazí do výšky odpovídající 75 % jeho předchozí výšky (tedy do $\frac{3}{4}$ předchozí výšky). Tento proces teoreticky pokračuje do nekonečna.

- Jakou celkovou svislou dráhu (směrem dolů i nahoru) míček urazí, než se teoreticky úplně zastaví?
- *Nápověda:* Pozor na to, že první dráha (pád z 2 metrů) se započítává jen jednou směrem dolů, zatímco všechny další odrazy zahrnují cestu nahoru i dolů.

12. Zénónův paradox: Achilles a želva (Historická aplikace)

Slavný antický paradox tvrdí, že rychlý Achilles nikdy nedohoní pomalou želvu, pokud má želva náskok. Předpokládejme, že Achilles běží desetkrát rychleji než želva a želva má náskok 100 metrů. Zatímco Achilles uběhne oněch 100 metrů, želva se posune o 10 metrů. Když Achilles uběhne těchto 10 metrů, želva se posune o 1 metr. Když Achilles uběhne tento 1 metr, želva se posune o 0,1 metru, a tak dále.

- Zapište vzdálenost, kterou musí Achilles uběhnout, aby želvu dostihl, jako nekonečnou řadu.
- Sečtete tuto řadu a dokažte Zénónovi, v jaké přesné vzdálenosti od startu Achilles želvu dožene.

13. Hromadění léku v těle (Aplikace ve farmakokinetice)

Pacient užívá pravidelně každých 24 hodin 100 mg určitého léku. Během 24 hodin tělo pacienta metabolizuje a vyloučí přesně 50 % aktuálního množství léku v krvi. Těsně po podání druhé dávky je v těle 100 mg (nová dávka) + 50 mg (zbytek z první dávky). Těsně po podání třetí dávky to bude 100 mg + 50 mg + 25 mg.

- Vypočítejte, jaké bude maximální množství léku v těle pacienta bezprostředně po podání dávky, pokud bude lék takto užívat dlouhodobě (teoreticky nekonečně dlouho).
- Proč je tento výpočet pro lékaře klíčový při určování správného dávkování?