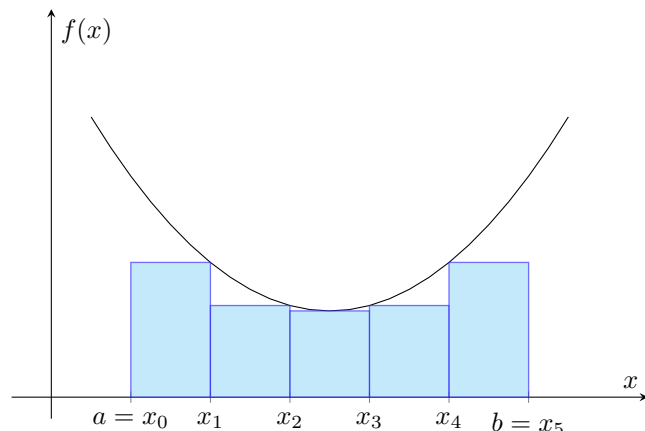


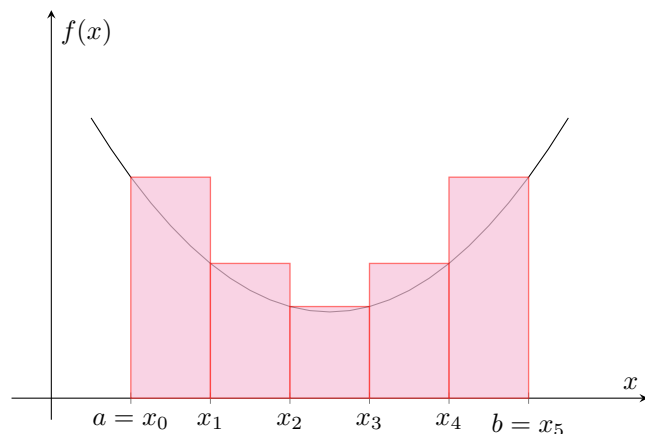
## Riemannův integrál

- Pro funkci definovanou a kladnou na intervalu  $I = [a, b]$  odhadujeme obsah obrazce pod grafem funkce.

Dolní odhad pomocí obdélníků



Horní odhad pomocí obdélníků



- Zjemňováním dělení intervalu  $[a, b]$  dostaneme přesnější dolní a horní odhady.
- Funkci nazveme **Riemannovsky integrovatelnou na intervalu  $[a, b]$** , pokud nám „v limitě“ dají dolní a horní odhady jednu hodnotu.

Tuto hodnotu nazveme **Riemannovým integrálem** funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ . Značíme

$$({R}) \int_a^b f(x) dx$$

- Ukážeme, že funkce spojitá na uzavřeném intervalu  $I = [a, b]$  je Riemannovsky integrovatelná na  $I$ . K důkazu budeme potřebovat stejnoměrnou spojitost.
- Ukážeme, že Dirichletova funkce není (na žádném) intervalu Riemannovsky integrovatelná.
- Zformulujeme (a některé dokážeme) vlastnosti Riemannova integrálu
  - Aditivita vzhledem k intervalu
  - Linearita (vzhledem k funkci)
  - Riemannův integrál konstantní funkce
  - Nezápornost (tj. nezápornost hodnoty integrálu z nezáporné funkce)
  - Monotonie (tj. z  $f \geq g$  na intervalu  $I$  plyne stejná relace pro jejich integrály)
  - Riemannův integrál s proměnnou horní mezí (definice níže) je spojitou funkcí.

- **K důkazu integrovatelnosti spojitě funkce:** (připomeňme, že funkce je na otevřeném intervalu integrovatelná, pokud má na tomto intervalu primitivní funkci)

Budeme definovat Riemannův integrál i pro meze  $a \geq b$ .

Pro funkci spojitou na  $I = (a, b)$  zvolíme  $c \in I$  a budeme definovat Riemannův integrál s proměnnou horní mezí

$$F(x) = (R) \int_c^x f(t) dt$$

a ukážeme, že funkce  $F$  je primitivní funkcí  $f$  na  $I$ .

Hlavní myšlenka důkazu je stejná jako úvahy, které vedly ke vztahu  $V'(h) = S(h)$  při zkoumání rotačně symetrické nádoby.

- Odtud už je jednoduchá cesta k důkazu **Newton-Leibnizovy věty**, která tvrdí:
  - Je-li funkce  $f$  spojitá na uzavřeném intervalu  $I = [a, b]$ , pak je na  $I$  Newtonovsky i Riemannovsky integrovatelná a oba integrály mají stejnou hodnotu.
- **Vztah Newtonova a Riemannova integrálu.**
  - Ne neomezeném intervalu **není** žádná funkce **Riemannovsky integrovatelná**, protože pro tento interval nedávají dobrý smysl již první kroky definice Riemannova integrálu. Na cvičení a ve zkouškové písemce najdete příklady funkcí, které **jsou** na neomezeném intervalu **Newtonovsky integrovatelné**.
  - Podobně to je na omezeném intervalu s neomezenou funkcí.
  - Riemannova funkce (je podobná Dirichletově funkci) **je Riemannovsky integrovatelná**, ale **není Newtonovsky integrovatelná**.