

Goniometrické funkce na pravoúhlém trojúhelníku

Pro studenty učitelství matematiky

Martina Šimůnková

6. února 2026

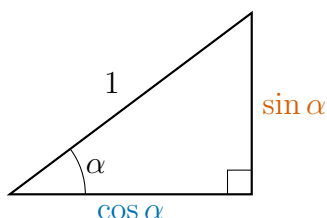
1 Trigonometrická definice goniometrických funkcí

1.1 Definice na trojúhelníku s jednotkovou přeponou

Základní geometrická definice funkcí sinus a kosinus vychází z pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku rovnou jedné ($c = 1$).

V takovém trojúhelníku s ostrým úhlem α :

- **Kosinus** úhlu α je délka odvěsny přilehlé k úhlu α .
- **Sinus** úhlu α je délka odvěsny protilehlé k úhlu α .

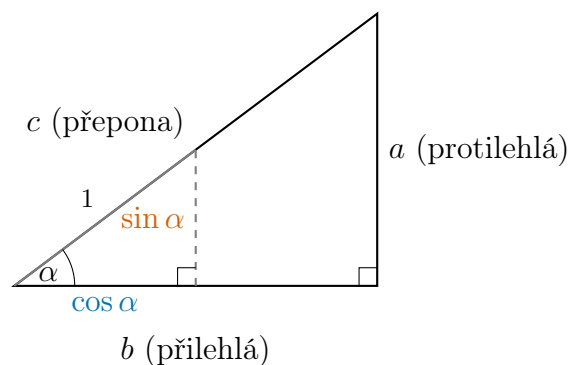


1.2 Zobecnění pro libovolný pravoúhlý trojúhelník

V praxi se málokdy setkáváme s trojúhelníky, které mají přeponu délky 1. Pro zavedení definice na obecném pravoúhlém trojúhelníku využíváme **podobnost trojúhelníků**.

Mějme dva pravoúhlé trojúhelníky se společným ostrým úhlem α : Malý (jednotkový) s přeponou 1. Velký (obecný) s přeponou c .

Protože se trojúhelníky shodují ve dvou úhlech (pravý úhel a úhel α), jsou podle věty *uu* podobné. Poměr odpovídajících stran je tedy konstantní a roven koeficientu podobnosti $k = c$.



Z podobnosti plyne:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{1} \implies \sin \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos \alpha}{1} \implies \cos \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$$

Vyjádření délek odvěsen

Z předchozích úvah plynou klíčové vztahy pro výpočet délek odvěsen, známe-li přeponu c a úhel α . K těmto vzorcům můžeme dospět dvěma cestami:

1. **Algebraická úprava definice:** Vyjdeme z definice funkcí jako poměru stran a rovnice vynásobíme délkou přepony c :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \bigg/ \cdot c \quad \longrightarrow \quad a = c \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \bigg/ \cdot c \quad \longrightarrow \quad b = c \cdot \cos \alpha$$

2. **Přímá úvaha o podobnosti (škálování):** Představme si „zvětšování“ jednotkového trojúhelníku na náš obecný trojúhelník.

- Jednotkový trojúhelník (přepona 1) má odvěsny o délkách $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.
- Obecný trojúhelník má přeponu délky c .

Koeficient podobnosti je tedy roven c (přepona je c -krát větší). Proto i obě odvěsny musí být právě c -krát větší než v jednotkovém trojúhelníku:

$$\text{protilehlá } a = c \cdot (\text{původní protilehlá}) = c \cdot \sin \alpha$$

$$\text{přilehlá } b = c \cdot (\text{původní přilehlá}) = c \cdot \cos \alpha$$

Tyto vztahy si rámečkem zvýrazněte, jsou klíčové pro fyzikální aplikace (rozkłady sil) i geometrické výpočty:

$$\boxed{a = c \cdot \sin \alpha} \quad \text{a} \quad \boxed{b = c \cdot \cos \alpha}$$

1.3 Výhody a nevýhody trigonometrické definice

Výhoda: Geometrická názornost

Tato definice je pro žáky nejpřirozenější, protože vychází z reálných objektů (trojúhelníků) a staví na již známých poznatcích (podobnost). Je přímo aplikovatelná v planimetrii a fyzice.

Nevýhoda: Omezený definiční obor

Zásadním limitem je, že úhel v pravoúhlém trojúhelníku musí být ostrý. Funkce jsou tak definovány pouze pro:

$$\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$$

Pro nulový, pravý, tupý nebo záporný úhel tato definice selhává a je nutné přejít k definici na jednotkové kružnici.

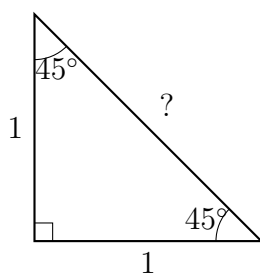
1.4 Úloha: určení speciálních hodnot goniometrických funkcí

V této části odvodíme přesné hodnoty funkcí sinus a kosinus pro úhly 30° , 45° a 60° . Tyto hodnoty patří k základním znalostem (tzv. tabulkové hodnoty). K jejich odvození využijeme vlastnosti základních geometrických útvarů a Pythagorovu větu.

A) Úhel 45°

Zadání: Uvažujte rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají délku 1.

1. Vypočítejte délku přepony.
2. Určete hodnoty $\sin 45^\circ$ a $\cos 45^\circ$.



Návod k řešení:

1. **Výpočet přepony:** Podle Pythagorovy věty platí pro přeponu c :

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \implies c = \sqrt{2}$$

2. **Určení funkcí:** Podle definice (protilehlá/přepona, přilehlá/přepona):

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

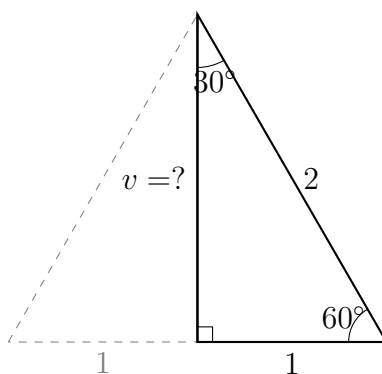
Zlomky usměrníme (rozšíříme $\sqrt{2}$):

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

B) Úhly 30° a 60°

Zadání: Uvažujte rovnostranný trojúhelník o straně délky 2. Výška na stranu rozdělí tento trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.

1. Určete velikosti vnitřních úhlů vzniklého pravoúhlého trojúhelníku.
2. Vypočítejte délku výšky (která je odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku).
3. Odvoďte hodnoty $\sin$ a $\cos$ pro 30° a 60° .



Návod k řešení:

1. **Geometrický rozbor:** Rovnostranný trojúhelník má všechny úhly 60° . Výška půlí základnu (proto má odvěsna délku 1) a půlí vrcholový úhel (proto 30°). Přepona má délku 2.

2. **Výpočet výšky:** Z Pythagorovy věty pro vybarvený trojúhelník ($1^2 + v^2 = 2^2$):

$$v^2 = 4 - 1 = 3 \implies v = \sqrt{3}$$

3. **Určení funkcí pro 60° :**

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}} = \frac{1}{2}$$

4. **Určení funkcí pro 30° :**

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{protilehlá (naproti } 30^\circ)}{\text{přepona}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{přilehlá (u } 30^\circ)}{\text{přepona}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 Součtové a rozdílové vzorce

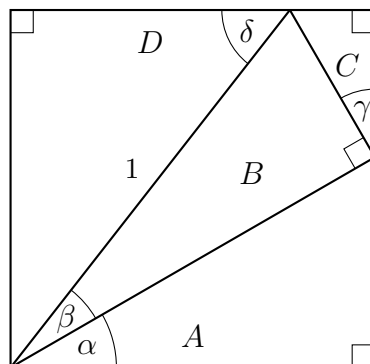
2.1 Úloha: Odvození součtových vzorců

Obrázek znázorňuje obdélník, který je rozdělen na čtyři pravoúhlé trojúhelníky (A, B, C, D). Dělení vychází z levého dolního rohu, kde jsou úhly α a β umístěny vedle sebe.

Popis konstrukce:

- **Trojúhelník A (dole):** Jeho odvěsny leží na stranách obdélníku. Úhel u levého dolního vrcholu je α .
- **Trojúhelník B (střední):** Jeho přilehlá odvěsna je totožná s přeponou trojúhelníku A. Úhel u levého dolního vrcholu je β . Jeho **přepona má délku 1**.
- **Trojúhelník C (vpravo nahoře):** Jeho přepona je totožná s protilehlou odvěsnou trojúhelníku B. Jeho vrchol s pravým úhlem je v rohu obdélníku.

- **Trojúhelník D (vlevo nahoře):** Vyplňuje zbývající část obdélníku. Jeho přepona je totožná s přeponou trojúhelníku B (má délku 1). Jeho vrchol s pravým úhlem je v rohu obdélníku.



Zadání úloh:

1. Určete velikosti ostrých úhlů v trojúhelnících C a D.
2. Dopačítejte délky všech stran všech čtyř trojúhelníků (vyjádřete je pomocí goniometrických funkcí úhlů α a β).
3. Z rovnosti délek protilehlých stran obdélníku (šířka a výška) odvoďte součtové vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$ a $\sin(\alpha + \beta)$.

Návod řešení

1. Úhly:

- **Trojúhelník C:** Úhel na pravé straně obdélníku je přímý (180°). Skládá se z úhlu v $\triangle A$ ($90^\circ - \alpha$), pravého úhlu v $\triangle B$ (90°) a hledaného úhlu γ .

$$(90^\circ - \alpha) + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \implies \gamma = \alpha$$

- **Trojúhelník D:** Úhel na horní straně obdélníku je přímý. Skládá se z úhlu v $\triangle C$ ($90^\circ - \gamma = 90^\circ - \alpha$), úhlu v $\triangle B$ ($90^\circ - \beta$) a hledaného úhlu δ . *Alternativní způsob pro D:* V $\triangle D$ známe úhel u levého dolního rohu. Celý roh obdélníku má 90° , je rozdělen na α, β a úhel v $\triangle D$. Úhel v $\triangle D$ u BL je tedy $90^\circ - (\alpha + \beta)$. Hledaný úhel δ je jeho doplněk do 90° :

$$\delta = 90^\circ - (90^\circ - (\alpha + \beta)) = \alpha + \beta$$

2. Strany (postupujeme od trojúhelníku se známou stranou):

- **Trojúhelník B** (přepona = 1, úhel β):

$$\text{přilehlá (společná s A)} = 1 \cdot \cos \beta$$

$$\text{protilehlá (společná s C)} = 1 \cdot \sin \beta$$

- **Trojúhelník A** (přepona = $\cos \beta$, úhel α):

$$\text{vodorovná odvěsna} = \text{přepona} \cdot \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha$$

$$\text{svislá odvěsna} = \text{přepona} \cdot \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$$

- **Trojúhelník C** (přepona = $\sin \beta$, úhel u Q je α):

$$\text{svislá odvěsna} = \text{přepona} \cdot \cos \alpha = \sin \beta \cos \alpha$$

$$\text{vodorovná odvěsna} = \text{přepona} \cdot \sin \alpha = \sin \beta \sin \alpha$$

- **Trojúhelník D** (přepona = 1, úhel u BL je $90^\circ - (\alpha + \beta)$):

$$\text{svislá odvěsna (výška)} = 1 \cdot \cos(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{vodorovná odvěsna} = 1 \cdot \sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + \beta)$$

3. Odvození vzorců z rovnosti stran obdélníku:

Šířka obdélníku: Dolní strana (z $\triangle A$) = $\cos \beta \cos \alpha$, horní strana (součet $\triangle D$ a $\triangle C$) = $\cos(\alpha + \beta) + \sin \beta \sin \alpha$ Porovnáním získáme: $\cos \beta \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta) + \sin \beta \sin \alpha$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

Výška obdélníku: Levá strana (z $\triangle D$) = $\sin(\alpha + \beta)$, pravá strana (součet $\triangle A$ a $\triangle C$) = $\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha$ Porovnáním získáme:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2)$$

2.2 Odvození rozdílových vzorců

Zatímco součtové vzorce lze hezky odvodit geometricky, geometrické odvození rozdílových vzorců bývá pro žáky vizuálně nepřehledné. Algebraické využití soustavy rovnic je proto didakticky vhodnější cestou.

Nejprve si ale musíme připomenout klíčovou identitu, která platí v každém pravoúhlém trojúhelníku – tzv. **goniometrickou jedničku**.

Goniometrická jednička

V libovolném pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c platí Pythagorova věta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pokud obě strany rovnice vydělíme c^2 , dostaneme:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Protože $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ a $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, platí pro libovolný ostrý úhel α :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3)$$

Vzorce pro rozdíl úhlů

Mějme úhel γ , který vznikl součtem dvou ostrých úhlů α a β , tedy $\gamma = \alpha + \beta$. Odtud můžeme vyjádřit úhel α jako rozdíl: $\alpha = \gamma - \beta$. Naším cílem je najít vzorce pro $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ (tedy pro $\sin(\gamma - \beta)$ a $\cos(\gamma - \beta)$).

Použijeme již známé součtové vzorce pro úhel γ :

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4)$$

$$\cos \gamma = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (5)$$

Na tyto rovnice se díváme jako na **soustavu dvou lineárních rovnic**, kde neznámé jsou $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.

1. Výpočet $\sin(\gamma - \beta)$: Abychom osamostatnili $\sin \alpha$, musíme ze soustavy vyloučit $\cos \alpha$. Rovnici (4) vynásobíme $\cos \beta$ a rovnici (5) vynásobíme $-\sin \beta$:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \cos \beta &= \sin \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \\ -\cos \gamma \sin \beta &= -\cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \sin \alpha \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Nyní obě rovnice sečteme. Členy obsahující $\cos \alpha$ se odečtou:

$$\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta = \sin \alpha \underbrace{(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)}_1$$

S využitím goniometrické jedničky získáváme výsledný vzorec:

$$\sin(\gamma - \beta) = \sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta \quad (6)$$

2. Výpočet $\cos(\gamma - \beta)$: Pro osamostatnění $\cos \alpha$ vynásobíme rovnici (4) výrazem $\sin \beta$ a rovnici (5) výrazem $\cos \beta$:

$$\begin{aligned} \sin \gamma \sin \beta &= \sin \alpha \cos \beta \sin \beta + \cos \alpha \sin^2 \beta \\ \cos \gamma \cos \beta &= \cos \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \beta \end{aligned}$$

Sečtením rovnic se odečtou členy se $\sin \alpha$:

$$\sin \gamma \sin \beta + \cos \gamma \cos \beta = \cos \alpha \underbrace{(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}_1$$

Výsledný vzorec pro kosinus rozdílu je:

$$\cos(\gamma - \beta) = \cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta \quad (7)$$

3 Oblouková míra a limity

Zatímco v geometrii trojúhelníka je přirozené počítat ve stupních, v matematické analýze (při zkoumání limit a derivací) naráží stupňová míra na problémy. Ukážeme si, že zavedení obloukové míry (radiánů) vede k elegantnějším výsledkům, zejména u limity podílu sinu a argumentu. Z této limity pak plynou vzorce pro derivace, které jsou v obloukové míře jednodušší než ve stupních.

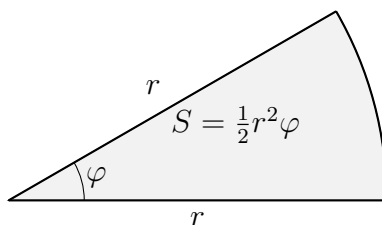
3.1 Obsah kruhové výseče

Velikost úhlu v radiánech je definována jako poměr délky oblouku kružnice k jejímu poloměru. Plný úhel (360°) odpovídá délce celé kružnice $2\pi r$, tedy v radiánech má velikost 2π .

Pro obsah kruhové výseče S o poloměru r a úhlu φ platí přímá úměra: Obsah výseče ku obsahu celého kruhu je roven poměru úhlu výseče k plnému úhlu.

$$\begin{array}{l} 2\pi \dots\dots \pi r^2 \\ \varphi \dots\dots S \end{array}$$

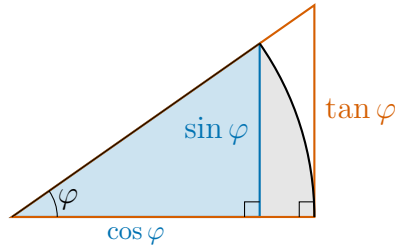
$$S = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2} r^2 \varphi}$$



3.2 Geometrický odhad podílu $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$

Uvažujme jednotkovou kružnici ($r = 1$) a ostrý úhel φ . Sestrojíme tři útvary seřazené podle inkluze (viz obrázek):

1. **Vepsaný pravoúhlý trojúhelník (modrý):** Jeho přepona je poloměrem výseče. Vrcholy jsou počátek, bod na kružnici a jeho kolmý průmět na osu x .
2. **Kruhová výseč (šedá):** Ohraničená dvěma poloměry a obloukem.
3. **Opsaný pravoúhlý trojúhelník (červený):** Jeho odvěsna je poloměrem výseče. Vrcholy jsou počátek, průsečík poloměru s kružnicí a bod na tečně.



Ze zřejmé inkluze útvarů (vepsaný $\subset$ výseč $\subset$ opsaný) plynou nerovnosti pro jejich obsahy:

$$S_{\text{vepsaný}} < S_{\text{výseč}} < S_{\text{opsaný}}$$

Dosadíme vzorce pro obsahy (pro $r = 1$):

- $S_{\text{vepsaný}} = \frac{1}{2} \cdot \text{základna} \cdot \text{výška} = \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi$
- $S_{\text{výseč}} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \varphi$
- $S_{\text{opsaný}} = \frac{1}{2} \cdot \text{základna} \cdot \text{výška} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan \varphi = \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$

Získáme nerovnost:

$$\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi < \frac{1}{2} \varphi < \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Nyní celou nerovnost upravíme, abychom osamostatnili výraz $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$. Protože φ je ostrý úhel, $\sin \varphi > 0$, a můžeme nerovnost vydělit výrazem $\frac{1}{2} \sin \varphi$:

$$\cos \varphi < \frac{\varphi}{\sin \varphi} < \frac{1}{\cos \varphi}$$

Nyní nerovnost převrátíme (při převrácení kladných hodnot se obrací znaky nerovnosti):

$$\frac{1}{\cos \varphi} > \frac{\sin \varphi}{\varphi} > \cos \varphi$$

Přepíšeme do standardního tvaru (od menšího k většímu):

$$\cos \varphi < \frac{\sin \varphi}{\varphi} < \frac{1}{\cos \varphi} \quad (8)$$

Tato nerovnost nám umožňuje určit limitu funkce $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$ v bodě nula

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \quad (9)$$

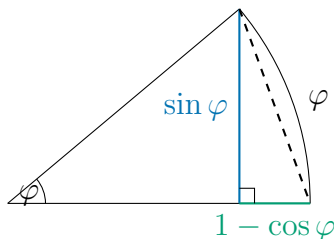
Použijeme k tomu Větu o limitě sevřené funkce. Před tím ale potřebujeme znát limity výrazů na levé a pravé straně nerovností (8). Odvodíme je v následující kapitole a poté se vrátíme k odvození limity (9).

3.3 Limity sinu a kosinu v nule zprava

Dokážeme, že pro $\varphi \rightarrow 0^+$ platí:

$$\sin \varphi \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad \cos \varphi \rightarrow 1$$

K důkazu využijeme geometrický náhled na jednotkové kružnici. Oblouk kružnice doplníme o jeho tětivu. Tato tětiva je přeponou pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky $\sin \varphi$ (svislá) a $1 - \cos \varphi$ (vodorovná).



Z geometrie trojúhelníka víme, že délka odvěsny je vždy menší než délka přepony (tětivy). Zároveň nejkratší spojnici dvou bodů je úsečka, proto je délka tětivy menší než délka oblouku φ . Pro $\varphi \in (0, \pi/2)$ tedy platí nerovnosti:

$$0 < \sin \varphi < \text{délka tětivy} < \varphi$$

$$0 < 1 - \cos \varphi < \text{délka tětivy} < \varphi$$

Aplikace Věty o sevřené funkci: Nyní využijeme *Větu o limitě sevřené funkce*¹.

- Pro sinus: Funkce $\sin \varphi$ je sevřena mezi konstantní funkcí 0 a funkcí $g(\varphi) = \varphi$. Limity těchto „svírajících“ funkcí jsou stejné

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} 0 = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \varphi = 0$$

a proto musí platit i

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \sin \varphi = 0 \quad (10)$$

- Pro kosinus: Funkce $1 - \cos \varphi$ je rovněž sevřena mezi 0 a φ . Proto je $\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} (1 - \cos \varphi) = 0$. Odtud s použitím věty o aritmetice limit a po úpravě plyne

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \cos \varphi = 1 \quad (11)$$

3.4 Základní limita pro sinus

Vraťme se k odvození hodnoty limity (9). Pro limitu na levé straně nerovností (8) platí

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \cos \varphi = 1 = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos \varphi}$$

První rovnost plyne z (11), druhá pak z věty o aritmetice limit.

Protože se limity rovnají, plyne z věty o sevřené funkci jedna ze **základních limit pro goniometrické funkce**

$$\boxed{\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1} \quad (12)$$

Důležité upozornění: Tato rovnost platí **pouze pro úhel v radiánech!** Právě tato „krásná“ vlastnost (že limita je rovna 1) je hlavním důvodem, proč se v matematice a fyzice používá oblouková míra přednostně před stupni. Při derivování funkcí sinus a kosinus nám díky tomu nevyskakují ve výsledcích žádné nepříjemné konstanty.

Úloha k zamyšlení: Jakou hodnotu by měla tato limita, kdybychom úhel φ dosazovali ve stupních? Spočtete limitu $\lim_{x^\circ \rightarrow 0} \frac{\sin(x^\circ)}{x^\circ}$.

Návod:

¹Neformálně se tato věta nazývá ‚o policajtech‘ nebo ‚o dvou strážnících‘.

- Převeďte argument sinu na radiány: $x = x^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$ rad.
- Využijte substituci $x = x^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$.
- Pokud $x^\circ \rightarrow 0$, pak i $x \rightarrow 0$.
- Výraz $\frac{\sin(x^\circ)}{x^\circ}$ upravte na tvar konstanta $\cdot \frac{\sin x}{x}$.
- Limita se pak rovná konstanta $\cdot 1$.

Výsledek: Limita ve stupních je rovna $\frac{\pi}{180}$ (přibližně 0,017). *Právě tato konstanta by nám „překážela“ ve vzorcích pro derivace, kdybychom nepřešli na radiány.*

4 Spojitost goniometrických funkcí

Spojítost funkcí je klíčová vlastnost pro matematickou analýzu. Dokážeme, že funkce sinus a kosinus jsou spojité na intervalu $(0, \pi/2)$, protože jsme omezení trigonometrickou definicí.

Po rozšíření definice na množinu reálných čísel (buď pomocí jednotkové kružnice nebo axiomatickou definicí) jsou obě funkce spojité na celé reálné ose.

4.1 Spojitost v obecném bodě α

Chceme dokázat, že funkce sinus je spojitá v libovolném bodě $\alpha \in (0, \pi/2)$. Funkce je spojitá, pokud se její limita zprava i limita zleva rovnají funkční hodnotě:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \sin x = \sin \alpha \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \sin x = \sin \alpha$$

Pro výpočet limit zavedeme substituci, kde φ představuje malý kladný přírůstek ($\varphi \rightarrow 0^+$).

a) Limita zprava ($x \rightarrow \alpha^+$): Místo x píšeme $\alpha + \varphi$, kde $\varphi > 0$. Použijeme součtový vzorec:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \sin x = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \sin(\alpha + \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi)$$

Nyní použijeme větu o aritmetice limit

$$= \sin \alpha \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \sin \varphi$$

a dříve dokázané limity v nule zprava (10), (11)

$$= \sin \alpha \cdot 1 + \cos \alpha \cdot 0 = \sin \alpha$$

b) Limita zleva ($x \rightarrow \alpha^-$): Místo x píšeme $\alpha - \varphi$, kde $\varphi > 0$. Použijeme rozdílový vzorec:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \sin x = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \sin(\alpha - \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} (\sin \alpha \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi)$$

Opět použijeme větu o aritmetice limit a dosadíme limity pro $\varphi \rightarrow 0^+$:

$$= \sin \alpha \cdot 1 - \cos \alpha \cdot 0 = \sin \alpha$$

Závěr pro sinus: Protože se limita zleva rovná limitě zprava a obě jsou rovny funkční hodnotě $\sin \alpha$, je funkce sinus spojitá v bodě α . Protože α bylo libovolné, je spojitá na $(0, \pi/2)$.

Návod pro kosinus: Postupujte analogicky. Pro limitu zprava využijte součtový vzorec pro $\cos(\alpha + \varphi)$, pro limitu zleva rozdílový vzorec pro $\cos(\alpha - \varphi)$. V obou případech dospějete k výsledku $\cos \alpha$.

4.2 Poznámky ke spojitosti

1. Spojitost funkcí tangens a kotangens

V předchozí části jsme dokázali spojitost funkcí sinus a kosinus (primárně jsme vycházeli z geometrie ostrých úhlů, ale tento výsledek je možné zobecnit). Spojitost funkcí tangens a kotangens plyne přímo z *Věty o spojitosti a aritmetických operací*.

Tato věta říká, že podíl dvou spojitých funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je spojitá funkce ve všech bodech, kde $g(x) \neq 0$.

- Funkce $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je spojitá všude tam, kde je $\cos x \neq 0$, tedy pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Funkce $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je spojitá všude tam, kde je $\sin x \neq 0$, tedy pro $x \neq k\pi$.

2. Spojitost při použití stupňové míry

Goniometrické funkce jsou často zadávány ve stupních (např. $\sin 30^\circ$). I v tomto případě se jedná o spojité funkce. Matematicky lze tento fakt zdůvodnit pomocí *Věty o spojitosti složené funkce*.

Uvažujme funkci $F(x) = \sin(x^\circ)$, kde x je hodnota ve stupních. Tuto funkci můžeme chápat jako složenou funkci $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, kde:

- **Vnitřní funkce $g(x)$:** Představuje převod ze stupňů na radiány. Jedná se o přímou úměru:

$$g(x) = x \cdot \frac{\pi}{180}$$

Toto je lineární funkce, a jak víme, lineární funkce je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

- **Vnější funkce $f(y)$:** Představuje funkci sinus aplikovanou na hodnotu v radiánech:

$$f(y) = \sin y$$

O této funkci jsme dokázali, že je spojitá v každém bodě $y \in (0, \pi/2)$ a víme, že je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$.

Aplikace věty o složené funkci: Věta říká: *Je-li vnitřní funkce g spojitá v bodě x_0 a vnější funkce f spojitá v bodě $y_0 = g(x_0)$, pak je složená funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0 .*

Jelikož vnitřní funkce (převod) je spojitá pro libovolné x_0 a vnější funkce (sinus) je spojitá pro libovolný obraz tohoto bodu, je i funkce $\sin(x^\circ)$ spojitá pro všechna reálná čísla. Analogicky to platí pro kosinus a s příslušnými omezeními definičního oboru i pro tangens a kotangens.

5 Odvození vzorců pro derivace

V této kapitole odvodíme vzorce pro derivace goniometrických funkcí. Budeme vycházet z limity $\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$, kterou jsme dokázali v předchozí části.

Důležité upozornění: Veškerá následující odvození a vzorce platí **pouze pro úhly v obloukové míře (radiánech)**. Pokud bychom počítali ve stupních, limita podílu sinu a argumentu by nebyla 1, ale konstanta $\frac{\pi}{180}$, která by se následně objevovala ve všech výsledcích derivací.

5.1 Pomocná limita pro kosinus

Ještě než přikročíme k derivování, odvodíme si jednu užitečnou limitu, kterou budeme ve výpočtech potřebovat:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos h}{h}$$

Výraz $1 - \cos h$ upravíme rozšířením zlomkem $\frac{1+\cos h}{1+\cos h}$ a použitím goniometrické jedničky ($\sin^2 h = 1 - \cos^2 h$):

$$1 - \cos h = (1 - \cos h) \cdot \frac{1 + \cos h}{1 + \cos h} = \frac{1 - \cos^2 h}{1 + \cos h} = \frac{\sin^2 h}{1 + \cos h}$$

Nyní dosadíme tento výraz do původní limity a zlomek vhodně rozdělíme na součin dvou zlomků, abychom mohli využít větu o aritmetice limit:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^2 h}{1 + \cos h}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1 + \cos h} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{1 + \cos h}}_{\frac{0}{1+1}=0} \\ &= 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Při výpočtu druhé limity jsme využili dříve odvozené limity (10), (11).

Platí tedy:

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos h}{h} = 0} \quad (13)$$

5.2 Derivace funkce sinus

Odvodíme vzorec pro derivaci funkce sinus na intervalu $(0, \pi/2)$. Využijeme dříve dokázané limity (12) a (13). Vzhledem k tomu, že tyto pomocné limity jsou jednostranné, budeme zkoumat limitu podílu přírůstků zvlášť zprava a zleva. Využijeme faktu, že derivace existuje, pokud se obě jednostranné limity rovnají.

Limita zprava (přírůstek $h > 0$)

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Použijeme součtový vzorec $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ a upravíme čitatele

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

V další úpravě použijeme větu o aritmetice limit

$$= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1 - \cos h)}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h}$$

a dosadíme dříve spočítané hodnoty

$$= \sin x \cdot (-0) + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Limita zleva (přírůstek $-h$, kde $h > 0$)

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x-h) - \sin x}{-h}$$

Použijeme rozdílový vzorec $\sin(x-h) = \sin x \cos h - \cos x \sin h$ a analogické úpravy jako v případě limity zprava:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cos h - \cos x \sin h - \sin x}{-h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(\cos h - 1) - \cos x \sin h}{-h} \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(1 - \cos h)}{-h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-\sin h}{-h} \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

Protože se derivace zprava i zleva rovnají, je funkce diferencovatelná a platí:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

5.3 Derivace funkce kosinus

Analogickým postupem (s využitím součtového vzorce pro kosinus: $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$) a stejné pomocné limity bychom dospěli k výsledku pro funkci kosinus. Všimněte si změny znaménka, která je důsledkem minusu v součtovém vzorci pro kosinus:

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

5.4 Derivace funkce tangens a kotangens

Funkce tangens je definována jako podíl sinu a kosinu. Pro její derivaci tedy využijeme pravidlo pro derivování podílu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pro $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

V čitateli získáme goniometrickou jedničku ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Odtud dostáváme první tvar vzorce:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Pokud zlomek rozdělíme na dva členy, získáme druhý užitečný tvar:

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Platí tedy:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Pro funkci kotangens ($\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$) dostaneme obdobným postupem:

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

5.5 Souvislost derivace s monotonií (Pomůcka)

Pro zapamatování znamének derivací (kde je minus a kde ne) nám skvěle poslouží souvislost derivace s růstem a klesáním funkce. Uvažujme náš interval $(0, \pi/2)$:

- **Sinus je rostoucí funkce.** Derivace rostoucí funkce musí být nezáporná. A skutečně: $(\sin x)' = \cos x$, což je v prvním kvadrantu **kladná** hodnota.
- **Kosinus je klesající funkce.** Derivace klesající funkce musí být nekladná. Derivací je $-\sin x$. Protože sinus je v prvním kvadrantu kladný, je $-\sin x$ **záporný**. To odpovídá klesajícímu charakteru funkce kosinus.