

# Nástroje pro výpočet limit

přehled pro studenty učitelství

Martina Šimůnková

8. února 2026

**Poznámka:** Pokud není uvedeno jinak, tak se následující nástroje týkají vlastních i nevlastních limit, tj.  $L \in \mathbb{R}$  i  $L \in \{\infty, -\infty\}$ . Týkají se limit ve vlastních i nevlastních bodech, tj.  $a \in \mathbb{R}$  i  $a \in \{\infty, -\infty\}$ . A pro  $a \in \mathbb{R}$  se týkají oboustranných i jednostranných limit, tj.  $x \rightarrow a$ ,  $x \rightarrow a^+$  i  $x \rightarrow a^-$ .

Formálně jsou tvrzení zformulovaná pro oboustranné limity a pro  $a \in \mathbb{R}$  platí i pro jednostranné limity.

Množinu  $R^* := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  nazýváme rozšířenou reálnou osou a prstencová okolí, se kterými v textu pracujeme, jsou pro její jednotlivé body:

- pro  $x \rightarrow \infty$  je  $P(\infty) = (b, \infty)$
- pro  $x \rightarrow -\infty$  je  $P(-\infty) = (-\infty, b)$
- pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow a$  je  $P(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$
- pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow a^+$  je  $P(a) = (a, a + \delta)$
- pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow a^-$  je  $P(a) = (a - \delta, a)$

## 1 Limita a spojitost [S]

Je-li  $a \in \mathbb{R}$  a funkce  $f$  je spojitá v bodě  $a$ , pak je limita rovna funkční hodnotě.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x) \stackrel{S}{=} \cos(\pi) = -1$

## 2 Rovnost na prstencovém okolí [P]

Pokud se dvě funkce shodují ve všech bodech prstencového okolí  $P(a)$ , mají v tomto bodě stejnou limitu. Formálně toto tvrzení zapíšeme

$$\forall x \in P(a) : f(x) = g(x) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Přesnější formulace je:

Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$  a necht' existuje prstencové okolí  $P(a)$  bodu  $a$  takové<sup>1</sup>, že  $\forall x \in P(a)$  platí  $f(x) = g(x)$ . Pak platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , jakmile má jedna ze stran smysl.

$$\textbf{Příklad:} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \stackrel{P}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \stackrel{S}{=} 2$$

### 3 Aritmetika vlastních limit [AL]

Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}$ . Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = A \cdot B, \quad \text{a pro } B \neq 0 \text{ je } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{A}{B}$$

$$\textbf{Příklad:} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) \stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$$

### 4 Operace v $\mathbb{R}^*$

Abychom mohli formulovat větu o aritmetice limit i pro nevlastní limity, potřebujeme na rozšířené reálné ose definovat operace. K nim přidáme i definici uspořádání na  $\mathbb{R}^*$  a výčet tzv. neurčitých výrazů (nedefinovaných operací):

---

<sup>1</sup>V dalším textu budeme pro stručnost vynechávat *necht' existuje prstencové okolí* a použijeme výše uvedenou stručnější formulaci.

| Operace            | Definice v $\mathbb{R}^*$ (pro $L \in \mathbb{R}$ )                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Sčítání a odčítání | $L + \infty = \infty + L = \infty$<br>$L + (-\infty) = -\infty + L = -\infty$<br>$\infty + \infty = \infty$<br>$-\infty + (-\infty) = -\infty$<br>$\infty - (-\infty) = \infty$<br>$-\infty - \infty = -\infty$                                                         |
| Násobení           | $L \cdot \infty = \begin{cases} \infty & L > 0 \\ -\infty & L < 0 \end{cases}$<br>$L \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & L > 0 \\ \infty & L < 0 \end{cases}$<br>$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$<br>$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ |
| Dělení             | $\frac{L}{\infty} = \frac{L}{-\infty} = 0$<br>$\frac{\infty}{L} = \operatorname{sgn}(L) \cdot \infty \quad (L \neq 0)$<br>$\frac{-\infty}{L} = \operatorname{sgn}(L) \cdot (-\infty) \quad (L \neq 0)$                                                                  |
| Neurčité výrazy    | $\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$                                                                                                                                                                                 |
| Uspořádání         | $-\infty < L < \infty$                                                                                                                                                                                                                                                  |

## 5 Aritmetika nevlastních limit [AL\*]

Nechť  $a, A, B \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Pak platí následující rovnosti za předpokladu, že je pravá strana rovnosti definovaná.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g) = A \cdot B, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{A}{B}$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+x} \stackrel{AL^*}{=} \frac{\infty}{+} \infty = \infty$

## 6 Typ $L/0^+$ [ $L/0^+$ ]

Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$  a  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Nechť existuje prstencové okolí  $P(a)$  bodu  $a$  takové, že  $\forall x \in P(a) : g(x) > 0$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \operatorname{sgn}(L) \cdot \infty$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \stackrel{L/0^+}{=} \infty$  (protože  $x^2 > 0$  na  $P(0)$ ).

**Poznámka (Obecný typ  $L/0$  a jednostranné limity):** Není-li splněna podmínka, že  $g(x)$  má na prstencovém okolí stálé znaménko (tj.  $g(x)$  mění znaménko v bodě  $a$ ), nelze o oboustranné limitě rozhodnout přímo. V takovém případě musíme vyšetřit **jednostranné limity** zvlášť (aplikujeme větu na pravém a levém okolí). Pokud vyjdou jednostranné limity různé (typicky  $+\infty$  a  $-\infty$ ), pak oboustranná limita **neexistuje**.

**Příklad:** Limita  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  neexistuje.

- Zprava ( $x > 0$ ):  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \stackrel{L/0^+}{=} \infty$
- Zleva ( $x < 0$ ):  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  (typ  $L/0^-$ )

Protože  $\infty \neq -\infty$ , oboustranná limita neexistuje.

## 7 Věta o sevřené funkci [VSF]

Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $L \in \mathbb{R}$  a nechť na  $P(a)$  platí  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) \stackrel{SF}{=} L$$

**Příklad:** Chceme spočítat limitu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ .

Víme, že pro  $x \in \mathbb{R}$  platí  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ . Vynásobením nerovností výrazem  $x > 0$  dostaneme  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ .

Odtud plyne  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \stackrel{SF}{=} 0$ ,

## 8 Věta o sevřené funkci [SF\*]

V případě nevlastních limit stačí sevření z jedné strany (na druhé straně je jedno z nekonečen jako „okraj“ rozšířené reálné osy).

Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $L \in \{\infty, -\infty\}$  a nechť pro  $x \in P(a)$ :

- V případě  $L = \infty$  platí  $g(x) \leq f(x)$ .
- V případě  $L = -\infty$  platí  $f(x) \leq g(x)$ .

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2 + \sin x) = \infty$ , protože pro  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  je  $x(2 + \sin x) \geq x$  a  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ .

## 9 Součin omezené a nulové funkce [0 · OM]

Tento nástroj umožňuje obejít fakt, že jedna z funkcí v součinu limitu vůbec nemá, pokud je tato funkce ohraničená.

- **Věta:** Necht'  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  a necht' funkce  $f$  je omezená na nějakém prstencovém okolí  $P(a)$  (tj. existuje  $M > 0$  takové, že  $|f(x)| \leq M$  pro všechna  $x \in P(a)$ ). Pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

**Příklad:** Výpočet  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

- Funkce  $g(x) = x$  má limitu  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ .
- Funkce  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  nemá v nule limitu, ale je na celém  $P(0)$  omezená, neboť  $|\sin(\alpha)| \leq 1$  pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- Tedy:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{0 \cdot \text{OM}}{=} 0$ .

## 10 L'Hospitalovo pravidlo [L'H]

Necht'  $a \in \mathbb{R}^*$ , existuje limita  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  a platí (i) nebo (ii)

(i)  $\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow a} g = 0$ ,

(ii)  $\lim_{x \rightarrow a} |g| = \infty$ .

Pak existuje i limita  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Příklad:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} \stackrel{S}{=} 1$

## 11 Limita složené funkce [LSF]

Necht' platí (i), (ii) a jedna z podmínek (iii), (iv)

(i)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ,

(ii)  $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = L$ ,

(iii)  $f$  je spojitá v bodě  $b$ ,

(iv)  $g(x) \neq b$  na nějakém prstencovém okolí  $P(a)$ .

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$

## 12 Složená funkce se spojitou vnější funkcí [SVF]

Ve větě o limitě složené funkce požadujeme platnost (iii) nebo (iv). Zaměřme se na případ (iii). Větu lze přeformulovat:

Nechť platí (i), (iii)

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b,$$

$$(iii) f \text{ je spojitá v bodě } b,$$

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$

$$\textbf{Příklad:} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3 + \frac{\sin(x)}{x}} \stackrel{SFV}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} 3 + \frac{\sin(x)}{x}} \stackrel{AL}{=} \sqrt{3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

## 13 Substitute v limitě [Sub]

Větu o limitě složené funkce za předpokladu (iv) lze přeformulovat jako větu o substituci v limitě.

Nechť platí

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b,$$

$$(ii) \lim_{y \rightarrow b} f(y) = L,$$

$$(iv) g(x) \neq b \text{ na nějakém prstencovém okolí } P(a).$$

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L$

$$\textbf{Příklad:} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Použili jsme substituci  $y = x - 2$ . Pro  $x \rightarrow 2$  je  $y \rightarrow 0$  a podmínka (iv)  $x - 2 \neq 0$  je na  $P(2)$  splněna.

**Poznámka:** Podmínka (iv) je splněna vždy, když je funkce  $g$  na pravém i levém okolí ryze monotónní, tedy buď rostoucí nebo klesající. Například  $g(x) = x^2$  je na pravém okolí nuly rostoucí a na levém okolí nuly klesající, proto je (iv) splněna a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$$

Vzhledem k tomu, že na prstencovém okolí bodu  $x = 0$  je  $y = x^2 > 0$ , můžeme oboustrannou limitu převést na jednostrannou limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y}$$

To se hodí v příkladě

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(\cos(x) - 1) \stackrel{y=\cos(x)-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(y) = -1$$

## 14 Limity monotonních funkcí [MON]

Je-li funkce  $f$  na prstencovém okolí bodu  $a$  monotonní, její jednostranné limity v tomto bodě vždy existují (vlastní nebo nevlastní) a jsou rovny supremu nebo infimu jejích hodnot.

- **Rostoucí na  $P^-(a)$ :**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in P^-(a)\}$
- **Klesající na  $P^-(a)$ :**  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in P^-(a)\}$
- **Rostoucí na  $P^+(a)$ :**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in P^+(a)\}$
- **Klesající na  $P^+(a)$ :**  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in P^+(a)\}$

**Poznámka:** Limity v nevlastních bodech  $\pm\infty$  lze v tomto kontextu chápat jako limity jednostranné (zleva v  $+\infty$  a zprava v  $-\infty$ ).

**Příklad (Exponenciální funkce):** Funkce  $f(x) = e^x$  je rostoucí na celém  $\mathbb{R}$ .

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \stackrel{MON}{=} \sup\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \stackrel{MON}{=} \inf\{e^x : x \in \mathbb{R}\} = 0$

**Příklad (Tangens):** Funkce  $f(x) = \operatorname{tg} x$  je rostoucí na intervalu  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \stackrel{MON}{=} \sup\{\operatorname{tg} x : x \in (-\pi/2, \pi/2)\} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x \stackrel{MON}{=} \inf\{\operatorname{tg} x : x \in (-\pi/2, \pi/2)\} = -\infty$