

Cyklometrické funkce: Teorie, řešení rovnic a derivace

Materiál pro studenty učitelství matematiky

1 Definice cyklometrických funkcí

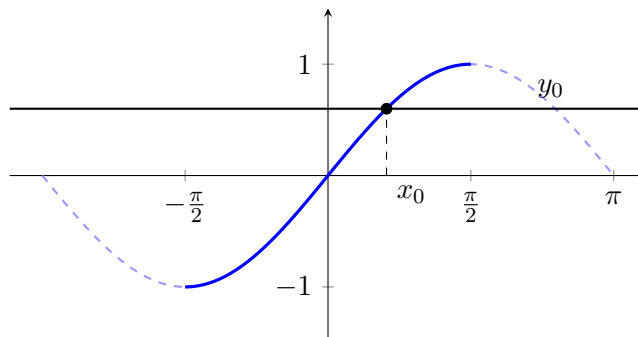
Goniometrické funkce (sinus, kosinus, tangens, kotangens) jsou periodické, a proto na celém svém definičním oboru nejsou prosté. Abychom k nim mohli definovat inverzní funkce, musíme jejich definiční obor zúžit na interval, kde prosté jsou a kde zároveň nabývají všech svých hodnot. Tyto inverzní funkce nazýváme **cyklometrické**.

Níže uvádíme definice jednotlivých funkcí. Na přiložených grafech je plnou čarou vyznačeno zúžení původní goniometrické funkce (čárkovaná čára naznačuje její periodické pokračování) a je zde graficky znázorněno řešení rovnice $f(x) = y_0$, kterému odpovídá jediná hodnota $x_0 = f^{-1}(y_0)$ uvnitř zúženého intervalu.

Arkussinus ($y = \arcsin x$)

Je inverzní funkce k funkci $y = \sin x$ zúžené na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Hodnota $\arcsin y$ přiřadí reálnému číslu $y \in [-1, 1]$ kořen rovnice $\sin x = y$ ležící v intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

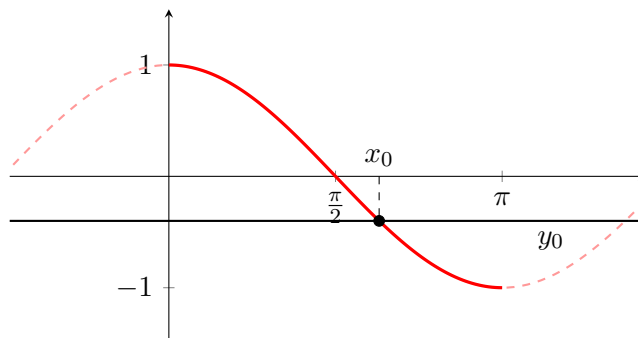
Zúžení $\sin x$ a kořen $x_0 = \arcsin y_0$



Arkuskosinus ($y = \arccos x$)

Je inverzní funkce k funkci $y = \cos x$ zúžené na interval $[0, \pi]$. Reálnému číslu $y \in [-1, 1]$ přiřadí kořen rovnice $\cos x = y$ z intervalu $[0, \pi]$.

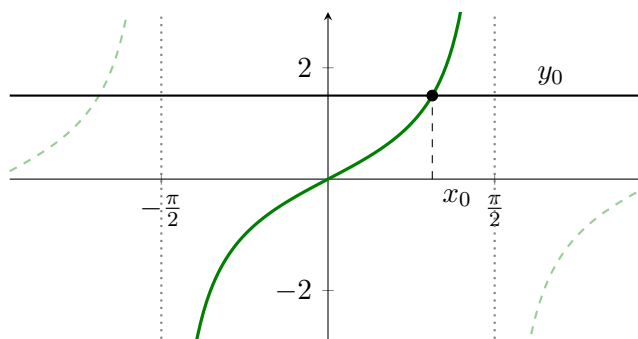
Zúžení $\cos x$ a kořen $x_0 = \arccos y_0$



Arkustangens ($y = \arctan x$)

Je inverzní funkce k funkci $y = \tan x$ zúžené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Reálnému číslu $y \in \mathbb{R}$ přiřadí kořen rovnice $\tan x = y$ z tohoto intervalu.

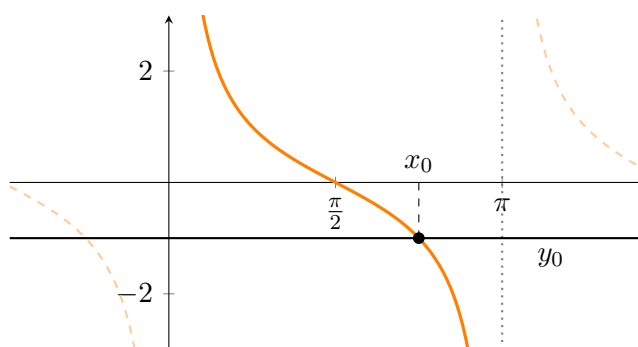
Zúžení $\tan x$ a kořen $x_0 = \arctan y_0$



Arkuskotangens ($y = \operatorname{arccotg} x$)

Je inverzní funkce k funkci $y = \cot x$ zúžené na interval $(0, \pi)$. Reálnému číslu $y \in \mathbb{R}$ přiřadí kořen rovnice $\cot x = y$ z tohoto intervalu.

Zúžení $\cot x$ a kořen $x_0 = \operatorname{arccotg} y_0$



2 Řešení goniometrické rovnice

Mějme rovnici:

$$\sin x = 0,6$$

Cílem je najít všechna řešení této rovnice na intervalu $[-\pi, 2\pi]$. Výsledky vyjádříme pomocí funkce arkussinus.

Z definice víme, že jedno řešení (tzv. hlavní hodnota) leží v intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a je dáno vztahem:

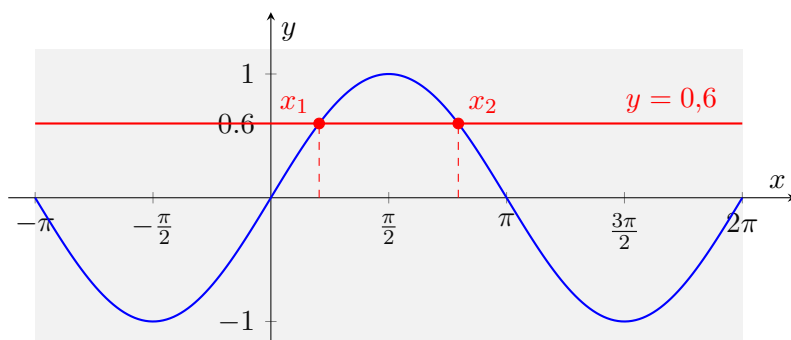
$$x_1 = \arcsin(0,6)$$

Další kořeny vyjádříme pomocí x_1 a použijeme buď graf funkce kosinus nebo jednotkovou kružnici.

V obou případech dostaneme výsledek: rovnice má na zadaném intervalu dva kořeny $x_1 = \arcsin(0,6)$, $x_2 = \pi - x_1$.

2.1 Metoda 1: Řešení pomocí grafu funkce sinus

Ze symetrie grafu funkce sinus podle osy $x = \pi/2$ určíme vztah pro x_2 : $x_1 = \pi - x_2$ a odtud vyjádříme x_2 .

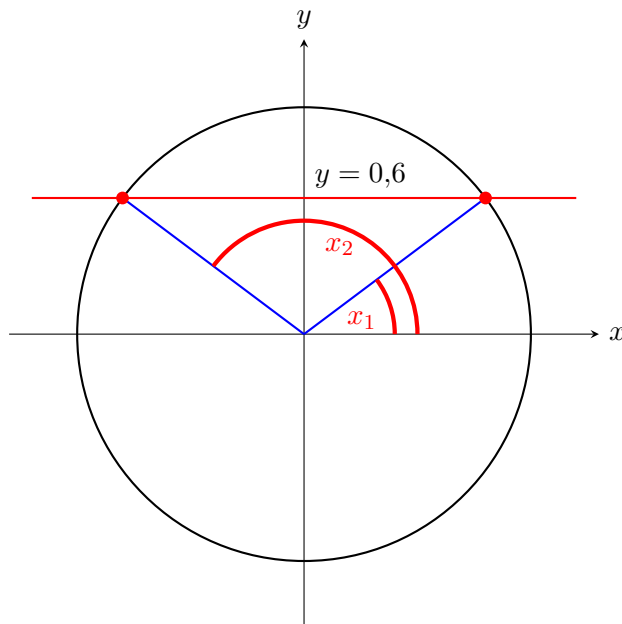


2.2 Metoda 2: Alternativní řešení pomocí jednotkové kružnice

Na jednotkové kružnici odpovídá hodnota funkce sinus y -ové souřadnici bodu na kružnici. Hledáme tedy body na kružnici, které mají souřadnici $y = 0,6$. Jak je vidět na obrázku níže, vodorovná přímka $y = 0,6$ protne jednotkovou kružnici ve dvou bodech.

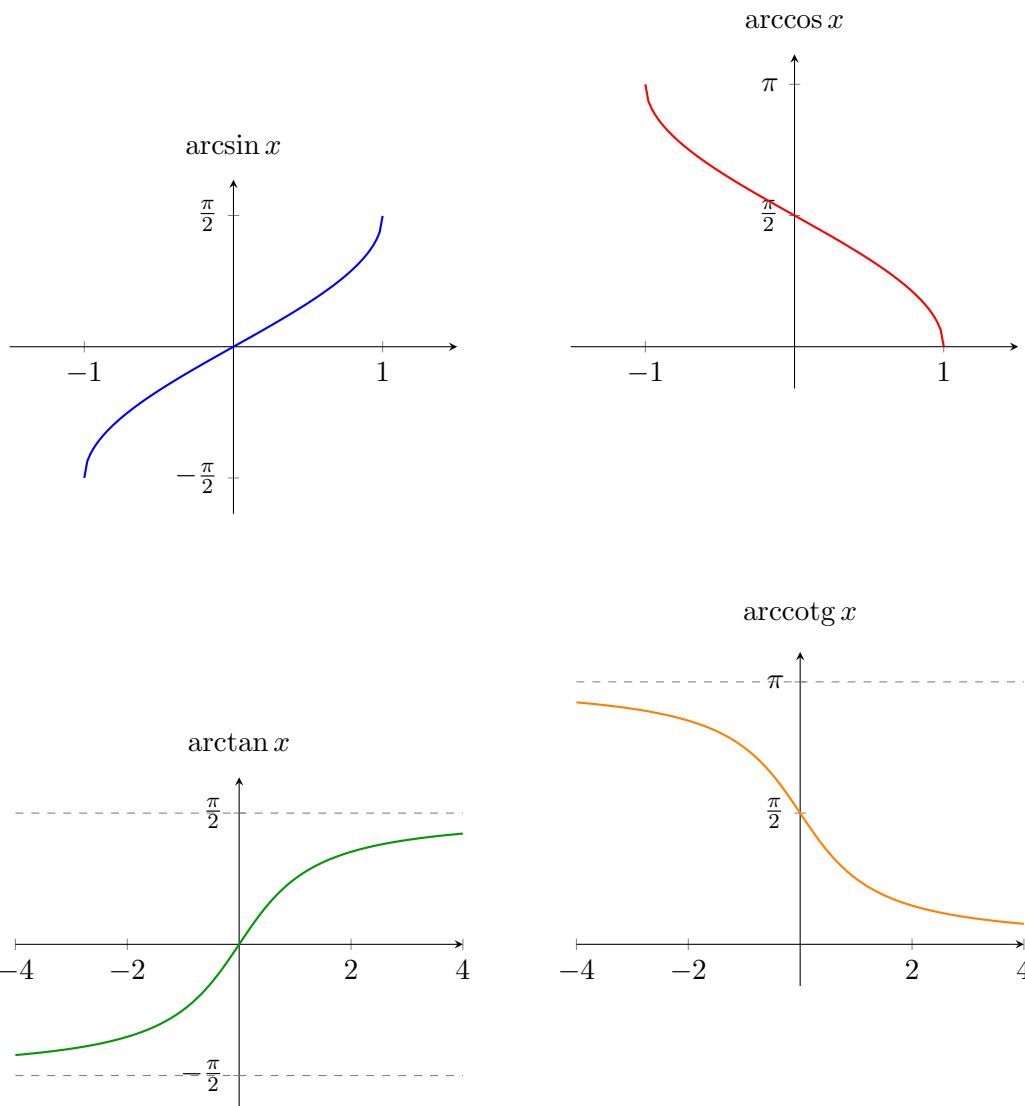
Tyto body jednoznačně určují orientované úhly (kořeny rovnice):

- První kořen x_1 leží v prvním kvadrantu a přísluší mu úhel $x_1 = \arcsin(0,6)$.
- Druhý kořen x_2 leží ve druhém kvadrantu a ze symetrie kružnice plyne, že odpovídající úhel je $x_2 = \pi - \arcsin(0,6)$.



3 Grafy cyklometrických funkcí

Grafy získáme osovou souměrností grafů zúžených goniometrických funkcí podle osy prvního a třetího kvadrantu ($y = x$).



4 Odvození vzorců pro derivace

Při odvozování derivací cyklometrických funkcí se opíráme o větu o derivaci inverzní funkce. Je-li funkce f prostá a má-li nenulovou derivaci, platí pro derivaci inverzní funkce f^{-1} :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{kde } y = f(x).$$

4.1 Derivace arcsin y

Nechť $y = \sin x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Derivujeme-li inverzní funkci:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x}$$

Protože $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, je $\cos x > 0$, a proto můžeme využít goniometrickou jedničku $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Dosazením $y = \sin x$ dostáváme konečný vztah:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1, 1).$$

4.2 Derivace $\arccos y$

Nechť $y = \cos x$ pro $x \in (0, \pi)$. Potom:

$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\sin x}$$

Na intervalu $(0, \pi)$ je $\sin x > 0$, tedy $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$. Po dosazení $y = \cos x$:

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad y \in (-1, 1).$$

4.3 Derivace $\arctan y$

Nechť $y = \tan x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Platí:

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x$$

Víme, že $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ (získáme vydělením rovnice $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ výrazem $\cos^2 x$).
Dosazením $y = \tan x$:

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

4.4 Derivace $\operatorname{arccotg} y$

Nechť $y = \cot x$ pro $x \in (0, \pi)$. Platí:

$$(\operatorname{arccotg} y)' = \frac{1}{(\cot x)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x$$

Analogicky, z rovnosti $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$ plyne $\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}$. Proto:

$$(\operatorname{arccotg} y)' = -\frac{1}{1 + \cot^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$