

Limity funkcí: Definice, věty a aplikace

Materiál pro studenty učitelství matematiky

1 Definice limit funkcí

Níže uvádíme definice jednostranných nevlastních limit a vlastních limit v nevlastních bodech. Nevlastními body nazýváme plus a minus nekonečno. Množinu $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ nazýváme rozšířenou reálnou osou.

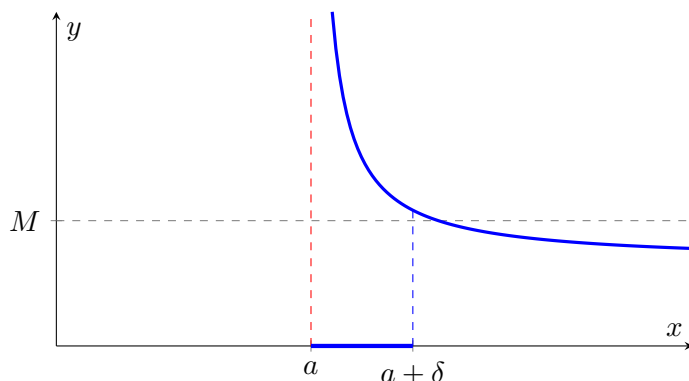
Definice formulujeme obecně a poté ukazujeme příklady limit goniometrických a cyklometrických funkcí.

1.1 Nevlastní limita ve vlastním bodě zprava (limita je $+\infty$)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu M existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$ platí $f(x) > M$.

Symbolicky:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) > M$$

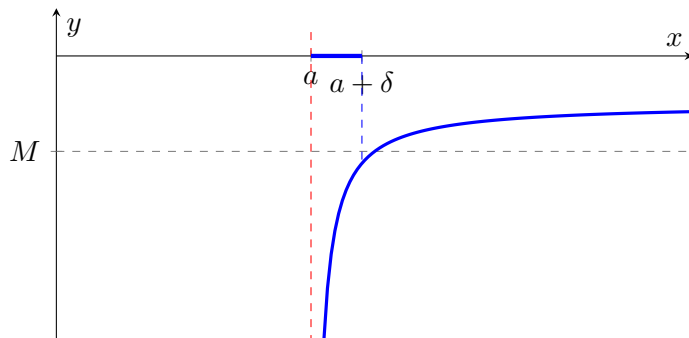


1.2 Nevlastní limita ve vlastním bodě zprava (limita je $-\infty$)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu M existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a, a + \delta)$ platí $f(x) < M$.

Symbolicky:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) < M$$

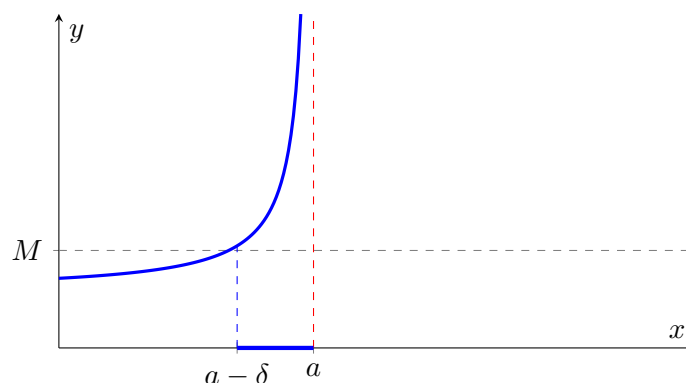


1.3 Nevlastní limita ve vlastním bodě zleva (limita je $+\infty$)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ zleva nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu M existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a - \delta, a)$ platí $f(x) > M$.

Symbolicky:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : f(x) > M$$

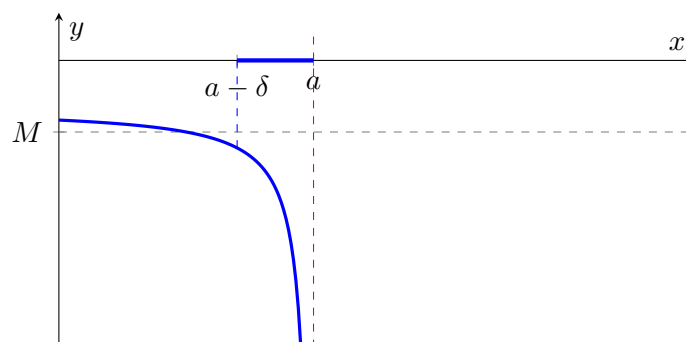


1.4 Nevlastní limita ve vlastním bodě zleva (limita je $-\infty$)

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ zleva nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu M existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna $x \in (a - \delta, a)$ platí $f(x) < M$.

Symbolicky:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : f(x) < M$$

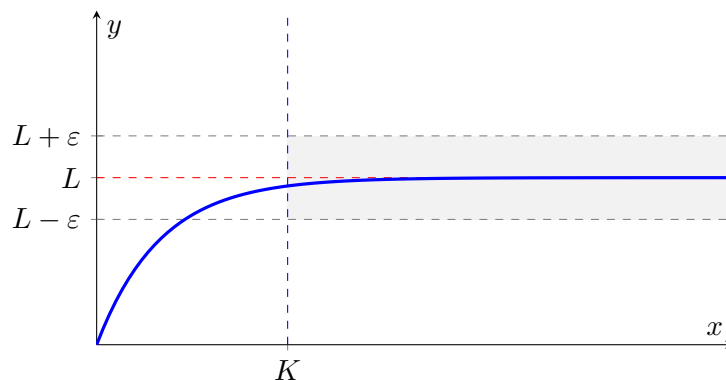


1.5 Vlastní limita v bodě $+\infty$

Řekneme, že funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo K takové, že pro všechna $x > K$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Symbolicky:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x > K : |f(x) - L| < \varepsilon$$

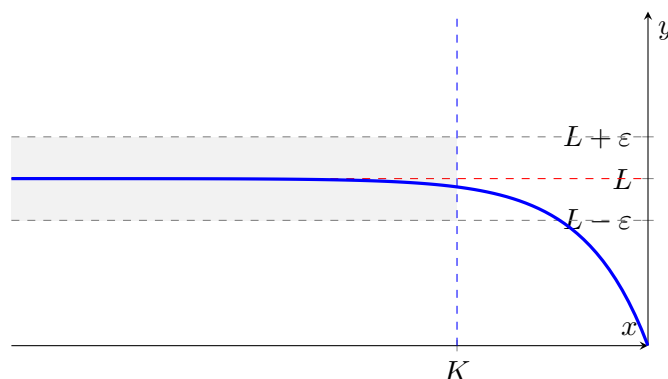


1.6 Vlastní limita v bodě $-\infty$

Řekneme, že funkce f má v nevlastním bodě $-\infty$ vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo K takové, že pro všechna $x < K$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Symbolicky:

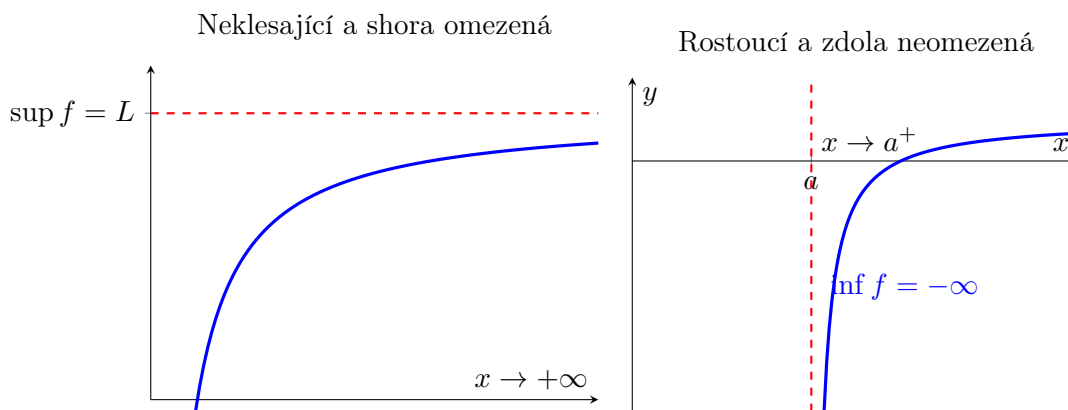
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x < K : |f(x) - L| < \varepsilon$$



2 Limity monotónních funkcí a jejich omezenost

Monotónnost funkce je silná vlastnost, která zaručuje existenci limity na okrajích definičního oboru. Typ této limity (vlastní vs. nevlastní) pak závisí výhradně na tom, zda je funkce omezená. Klíčovým poznatkem je, že **hodnota limity je přímo rovna supremu (resp. infimu) množiny funkčních hodnot** na příslušném intervalu.

- **Funkce monotónní a omezená** na okolí nevlastního bodu (např. neklesající na $(K, +\infty)$ a shora omezená) má v tomto bodě **vlastní limitu**. Tato limita je rovna supremu funkčních hodnot na tomto intervalu.
- **Funkce monotónní a neomezená** na jednostranném okolí vlastního bodu (např. neklesající na $(a, a + \delta)$ a neomezená zdola) má v tomto bodě **jednostrannou nevlastní limitu**. Tato limita je rovna infimu funkčních hodnot, což je v tomto případě $-\infty$.



3 Příklady limit goniometrických a cyklometrických funkcí

Na základě předchozích vět si nyní rozebereme chování goniometrických a cyklometrických funkcí na okrajích jejich (zúžených) definičních oborů.

3.1 Limity funkce tangens a kotangens

Funkce $y = \tan x$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí.

- Blížíme-li se k bodu $\frac{\pi}{2}$ zleva, funkce roste nad všechny meze. Je shora neomezená, a proto $\sup f = +\infty$. Limita zleva je:

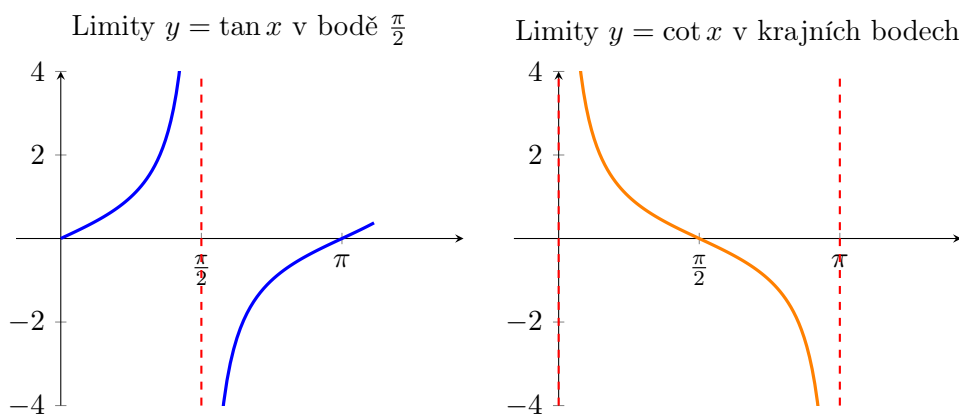
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

- Na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ je funkce rovněž rostoucí. Blížíme-li se k bodu $\frac{\pi}{2}$ zprava, funkce je zdola neomezená ($\inf f = -\infty$). Platí:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

Funkce $y = \cot x$ je na intervalu $(0, \pi)$ klesající.

- Pro $x \rightarrow 0^+$ je funkce shora neomezená ($\sup f = +\infty$), proto $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$.
- Pro $x \rightarrow \pi^-$ je funkce zdola neomezená ($\inf f = -\infty$), proto $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = -\infty$.



3.2 Limity funkcí arkustangens a arkuskotangens

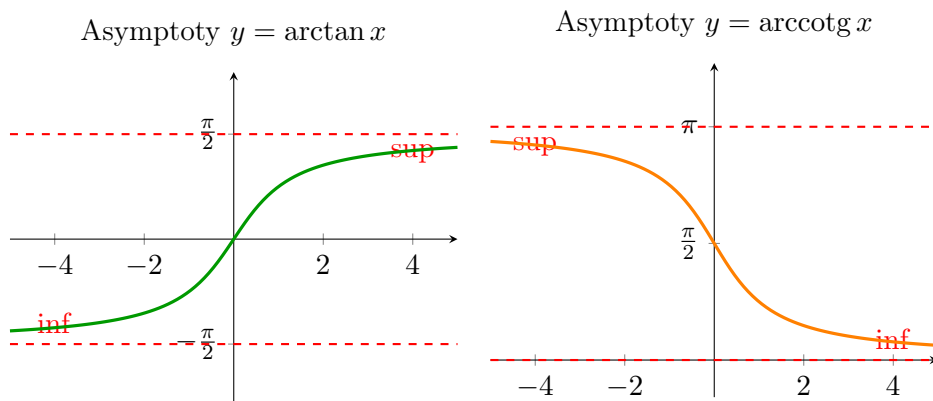
Z definice inverzní funkce víme, že definičním oborem těchto cyklometrických funkcí je celé $\mathbb{R}$. Jsou na něm přísně monotónní a omezené, proto mají v nekonečnách **vlastní limity**, které se rovnají supremu/infimu.

- Funkce $y = \arctan x$ je rostoucí a její hodnoty leží v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Platí tedy $\sup \arctan x = \frac{\pi}{2}$ a $\inf \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. To přímo určuje limity:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

- Funkce $y = \operatorname{arccotg} x$ je klesající a její hodnoty leží v intervalu $(0, \pi)$. Její $\sup = \pi$ a $\inf = 0$, z čehož plyne:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$



4 Důkazy existence limity monotónní funkce

V předchozích kapitolách jsme uvedli, že monotónnost funkce zaručuje existenci limity na okrajích definičního oboru. Nyní tento poznatek formálně dokážeme pro dva vybrané případy. Důkazy se opírají o vlastnosti suprema a infima množiny reálných čísel.

4.1 Příklad 1: Funkce klesající a neomezená v pravém okolí vlastního bodu

Uvažujme funkci f , která je na intervalu $(a, a + \delta_0)$ klesající a není na tomto intervalu shora omezená. Dokážeme, že v bodě a existuje nevlastní limita zprava rovna $+\infty$.

Definice (Nevlastní limita ve vlastním bodě zprava):

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) > M$$

Tuto definici jsme zavedli v sekci 1.1.

Předpoklady:

- Funkce f je klesající na $(a, a + \delta_0)$. To znamená: $\forall x_1, x_2 \in (a, a + \delta_0) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Funkce f není shora omezená. Množina hodnot $\{f(x) \mid x \in (a, a + \delta_0)\}$ nemá horní závorku. Supremum této množiny je $+\infty$.

Důkaz: Zvolme libovolné $M \in \mathbb{R}$. Protože f není shora omezená, musí v intervalu $(a, a + \delta_0)$ existovat alespoň jeden bod (označme jej x_M), pro který platí $f(x_M) > M$.

Položme $\delta = x_M - a$. Protože $x_M > a$, je $\delta > 0$. Nyní uvažujme libovolné $x \in (a, a + \delta)$. Z volby δ plyne, že $a < x < a + \delta = x_M$. Tedy platí $x < x_M$.

Využijeme nyní monotónnost funkce. Protože f je klesající a $x < x_M$, musí platit:

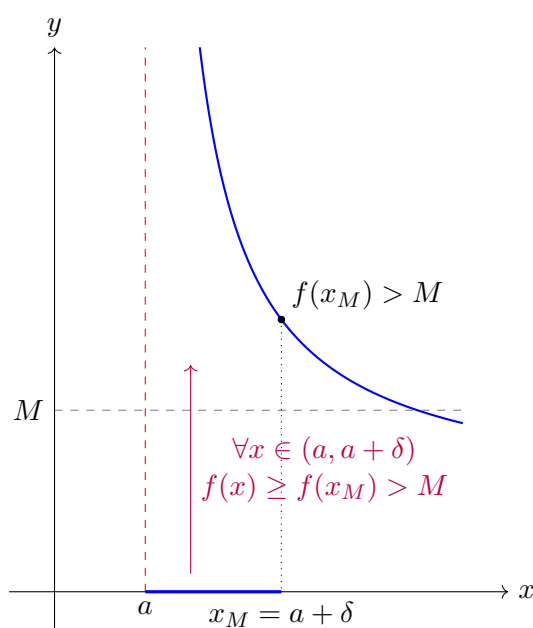
$$f(x) \geq f(x_M)$$

Víme, že $f(x_M) > M$. Z toho plyne transitivně:

$$f(x) > M$$

Tím je splněna podmínka definice limity. Ke každému M jsme našli δ takové, že na $(a, a + \delta)$ jsou funkční hodnoty větší než M .

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



□

4.2 Příklad 2: Funkce klesající a omezená v okolí plus nekonečna

Uvažujme funkci f , která je na intervalu $(K, +\infty)$ klesající a zdola omezená. Dokážeme, že má v bodě $+\infty$ vlastní limitu L , která je rovna infimu funkčních hodnot.

Definice (Vlastní limita v nevlastním bodě):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in \mathbb{R} \forall x > x_0 : |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tuto definici jsme zavedli v sekci 1.5.

Definice (Infimum): Číslo L je infimem (největší dolní zavorou) množiny hodnot $H = \{f(x) \mid x > K\}$, pokud:

1. $\forall x > K : f(x) \geq L$ (dolní zavora).
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in H : y < L + \varepsilon$ (neexistuje větší dolní zavora).

Předpoklady:

- f je klesající: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f je zdola omezená, tedy existuje konečné infimum $L = \inf f$.

Důkaz: Označme $L = \inf\{f(x) \mid x > K\}$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.

Z druhé vlastnosti infima plyne, že musí existovat nějaký bod $x_0 \in (K, +\infty)$ takový, že jeho funkční hodnota je velmi blízko L :

$$f(x_0) < L + \varepsilon$$

Zároveň z první vlastnosti infima víme, že pro všechna x platí $f(x) \geq L$. Proto jistě platí i:

$$f(x_0) \geq L > L - \varepsilon$$

Tedy $f(x_0) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Nyní uvažujme libovolné $x > x_0$. Protože f je klesající, platí:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Z nerovnosti $f(x_0) < L + \varepsilon$ tedy plyne $f(x) < L + \varepsilon$. Současně, protože L je dolní závora, platí pro všechna x (a tedy i pro naše zvolené):

$$f(x) \geq L > L - \varepsilon$$

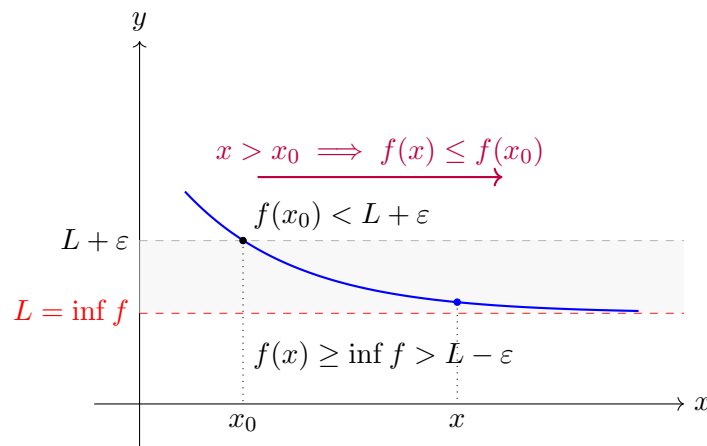
Kombinací těchto poznatků dostáváme:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tím jsme dokázali, že pro libovolné ε existuje x_0 takové, že pro všechna $x > x_0$ padne funkční hodnota do ε -okolí čísla L .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf f$$

Q.E.D.



□