

Číselné řady

Martina Šimůnková ve spolupráci s LLM Gemini

11. března 2026

Obsah

1	Úvod	5
1.1	Motivace: Kde všude v reálném světě potkáme nekonečno?	5
1.2	Základní pojmy: Posloupnost vs. Řada	8
2	Geometrická řada	9
2.1	Konečná a nekonečná geometrická řada	9
2.2	Řešené a neřešené úlohy	12

Kapitola 1

Úvod

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem časová řada ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy geometrická posloupnost, geometrická řada, aritmetická posloupnost, aritmetická řada. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, tedy součet.

Než přistoupíme k formálnímu výkladu, ukažme si několik situací z reálného světa, kde se s myšlenkou nekonečného součtu přirozeně setkáváme. Tyto příklady nám pomohou budovat intuici o tom, kdy má smysl nekonečně mnoho čísel sečíst a kdy to naopak vede k „explozi“ nebo zmatku.

1.1 Motivace: Kde všude v reálném světě potkáme nekonečno?

1. Magie čísel a školská praxe: Je $0, \bar{9}$ opravdu 1?

Jedna z nejčastějších otázek zvědavých žáků zní: *Jak může být číslo, které začíná nulou, rovno jedné?* Žáci často odmítají přijmout fakt, že $0, \bar{9} = 1$. Můžeme jim to však názorně ukázat pomocí nekonečného sčítání (nekonečné geometrické řady):

$$0, \bar{9} = 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Právě studium řad nám v následujících kapitolách dá do ruky silný nástroj, jak dokázat, že tento součet skutečně konverguje přesně k hodnotě 1.

2. Finanční gramotnost: Perpetuita a složené úročení

Pokud si budeme každý měsíc ukládat 1 000 Kč na účet s garantovaným úrokem, tvoří naše vklady a jejich úročení posloupnost. Co kdybychom však chtěli dostávat stabilní rentu „navždy“ (tzv. perpetuita)? Jakou hodnotu má takový slib dnes? Výpočet současné hodnoty budoucích nekonečných výnosů vede přímo na součet nekonečné geometrické řady:

$$S = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots$$

kde R je renta a i je úroková míra. Bez znalosti řad by moderní finanční matematika nemohla fungovat.

3. Fyzika a sport: Dráha skákajícího míčku

Pustíme gumový míček z výšky 1 metru. Po každém dopadu ztratí část své kinetické energie a vyskočí jen do 80 % předchozí výšky. Kolikrát se odrazí, než se úplně zastaví? Teoreticky nekonečněkrát. Jakou ale urazí celkovou dráhu? Dráha se skládá z letu dolů a nahoru:

$$s = 1 + 2 \cdot (0,8) + 2 \cdot (0,8^2) + 2 \cdot (0,8^3) + \dots$$

Ačkoliv proces obsahuje nekonečně mnoho kroků, celková dráha je konečná (řada konverguje). Toto je klasická ukázka toho, že nekonečno nemusí nutně znamenat „nekonečně velký výsledek“.

4. Lékařství: Dávkování léků v těle

Pacient dostane 100 mg léku. Během 8 hodin tělo odbourá 40 % účinné látky (zůstane 60 %). Za 8 hodin si pacient vezme dalších 100 mg. Pokud bude pacient brát léky dlouhodobě, poroste množství látky v těle do nekonečna (a dojde k otravě), nebo se ustálí na nějaké bezpečné hladině? Množství látky v těle těsně po podání n -té dávky tvoří částečný součet řady:

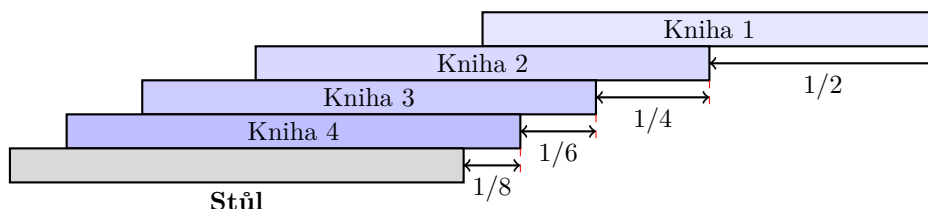
$$100 + 100 \cdot 0,6 + 100 \cdot 0,6^2 + \dots + 100 \cdot 0,6^{n-1}$$

Díky tomu, že kvocient je menší než 1, hladina léku v těle se ustálí.

5. Architektura a hlavolamy: Věž z knih

Představte si hromadu stejných učebnic. Chcete je vyskládat na sebe tak, aby horní kniha přečnívala co nejdále za hranu stolu, ale aby věž nespadla. Lze posunout těžiště tak, aby horní kniha byla úplně celá mimo stůl? A šlo by to posunout až na druhou stranu místnosti?

Aby byla stavba stabilní, musí těžiště všech knih nad danou knihou ležet přesně na její hraně. Postupným skládáním získáme následující model:



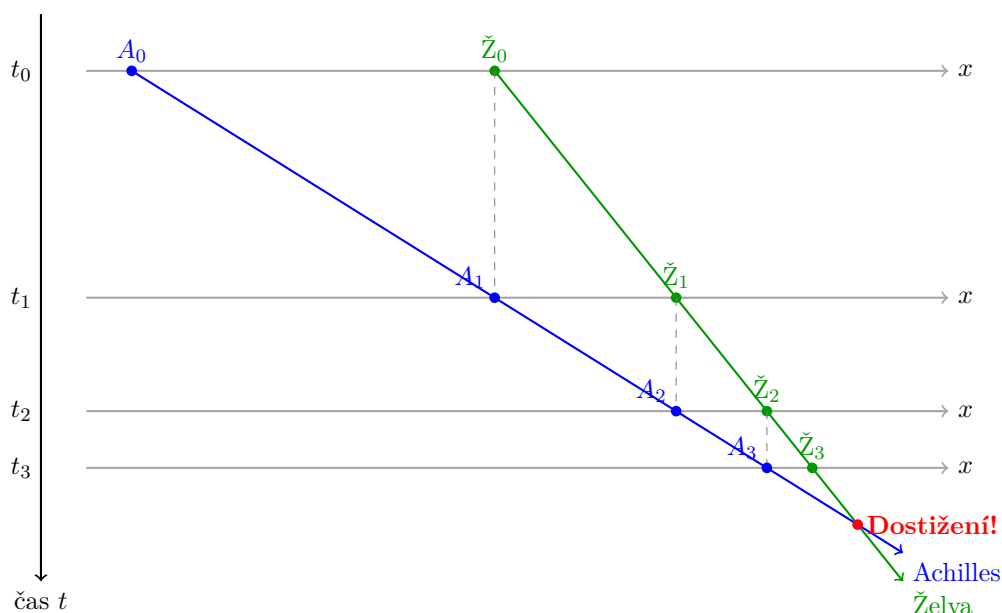
Fyzikální rozbor posunů těžiště nás přivede k řadě:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$$

Výraz v závorce je tzv. **harmonická řada**. Jak si později ukážeme, tato řada diverguje (její součet roste nade všechny meze). Překvapivá odpověď tedy zní: s dostatečným počtem knih postavíte most klidně přes celý oceán!

6. Zenonův paradox: Achilles a želva

Slavný antický paradox popisuje závod rychlého Achilla a pomalé želvy, která dostane náskok. Zenon z Eleje tvrdil, že Achilles želvu nikdy nedohoní. Jeho úvaha zněla takto: Než Achilles doběhne na místo, odkud želva startovala, želva se posune o kousek dál. Než Achilles překoná tento nový kousek, želva se opět o něco posune. Tento proces se opakuje donekonečna.



V čem Zenon chyboval? Zenonův omyl spočíval v tom, že čas potřebný k dohonění želvy (což je ve skutečnosti konečně dlouhý úsek) uměle rozdělil na nekonečně mnoho stále se zkracujících časových intervalů. Z faktu, že těchto intervalů je *nekonečně mnoho*, chybně vyvodil, že jejich součet musí být *nekonečný* (tedy že Achilles želvu nedohoní v konečném čase). Jak ale uvidíme u geometrických řad, součet nekonečně mnoha kladných čísel (v tomto případě časových úseků) může být konečný!

7. Záludný vypínač a klamy nekonečna (Grandiho řada)

Máte vypínač. Zmáčknutí znamená $+1$ (světlo), další zmáčknutí -1 (tma). Začnete s nulou a mačkáte donekonečna:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Bude na konci rozsvíceno, nebo zhasnuto? Pokud bychom použili neopatrné uzávorkování, mohli bychom tvrdit, že součet je $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$. Jiné uzávorkování $1 - (1 - 1) - (1 - 1) \dots$ dává 1. Tento příklad slouží jako důležité varování (kterému se budeme věnovat v kapitole 1.4): **s nekonečnem nelze provádět běžné algebrické úpravy tak, jak jsme zvyklí u konečných součtů.**

Úlohy k zamyšlení

- Rozpoznání řady:** Pozorně si přečtete příklady 1, 2, 3 a 4, uvědomte si, že pojednávají o geometrických řadách a pro každý z příkladů určete, jaký je kvocient příslušné geometrické řady.
- Řady ve vašem světě (Tvořivá úloha):** Vymyslete reálnou situaci z oblasti vašeho zájmu (může to být jiný studijní obor, sport, koníček nebo specifický pedagogický problém), která se dá modelovat pomocí matematické řady.
 - Popište situaci: Co přesně představují jednotlivé sčítance a_k ?
 - Dává ve vašem modelu smysl uvažovat o řadě konečné, nebo nekonečné?
 - Zkuste odhadnout (intuitivně nebo matematicky), zda vaše řada konverguje (blíží se k limitní hodnotě), diverguje (roste do nekonečna), nebo osciluje. Dává tento matematický výsledek smysl i v kontextu vaší reálné situace?

1.2 Základní pojmy: Posloupnost vs. Řada

Definice

Mějme posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme řadou, čísla a_k nazýváme členy řady. **Posloupností částečných součtů** (s_n) této řady rozumíme:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, říkáme, že **řada konverguje** a její součet je s . Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje**.

Didaktická poznámka

Metafora hromady písku:

Studentům se pojmy pletou. Představte si, že stavíte hromadu z písku.

- **Posloupnost** a_n odpovídá tomu, *kolik písku přisypu* v n -tém kroku.
- **Částečný součet** s_n je, *jak velká je hromada* po n krocích.

Konvergence znamená, že i když sypeme donekonečna, hromada nepřeroste určitou výšku. Nutnou podmínkou pochopitelně je, že velikost přidávaných lopatek písku se musí zmenšovat k nule ($\lim a_n = 0$).

Příklad

Řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

má třetí člen roven $1/3$, dvanáctý člen roven $-1/12$ a třetí částečný součet má roven $1 - 1/2 + 1/3 = 5/6$.

Kapitola 2

Geometrická řada

2.1 Konečná a nekonečná geometrická řada

V předchozích motivačních příkladech jsme často naráželi na situaci, kdy se sčítance postupně zmenšovaly vždy o stejný násobek. Tento typ řady je v matematice natolik fundamentální, že se jím budeme zabývat podrobněji.

Definice geometrické řady

Necht' $a_1 \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{R}$. **Geometrickou řadou** nazýváme řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické řady. Pro n -tý člen této řady platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Odvození vzorce pro částečný součet

Zkoumejme nejprve konečný součet prvních n členů geometrické řady, tedy n -tý částečný součet s_n . Máme rovnici:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (2.1)$$

Abychom tento součet upravili do uzavřeného tvaru, využijeme elegantní algebraický trik. Vynásobíme celou rovnici kvocientem q :

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (2.2)$$

Nyní odečteme rovnici (2.2) od rovnice (2.1). Všimněte si, že většina členů na pravé straně se vzájemně odečte a zbude pouze první člen z první rovnice a poslední člen z druhé rovnice:

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 q^n$$

Vytkneme s_n na levé straně a a_1 na pravé straně:

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Pokud $q \neq 1$, můžeme rovnici vydělit výrazem $(1 - q)$ a získáme vzorec pro částečný součet. Pokud $q = 1$, pak sčítáme n -krát stejné číslo a_1 , takže $s_n = n \cdot a_1$.

Částečný součet geometrické řady

Pro n -tý částečný součet geometrické řady s kvocientem $q \neq 1$ platí:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

V případě $q = 1$ platí

$$s_n = na_1$$

Trik s posunem a odečtením

Tento odvozovací trik (vynásobení kvocientem a odečtení) je jedním z nejužitečnějších obrátů, které můžete středoškolákům ukázat. Není to jen „vzoreček z tabulek k naučení z paměti“, ale logický postup. Stejný princip se učí už na základní škole při převodu periodického čísla na zlomek (kdy např. rovnici $x = 0,3$ vynásobíme 10 a odečteme původní x). Znalost samotného triku je mnohem cennější než znalost výsledného vzorce.

Limita q^n a součet nekonečné geometrické řady

Abychom určili součet nekonečné řady $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, musíme vyšetřit limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ v závislosti na parametru $q \in \mathbb{R}$.

Pro $q = 0$ je zjevně limita 0. Pro $q = 1$ je limita 1, částečný součet je $s_n = n \cdot a_1$ a řada diverguje.

1. Příklad $q > 0, q \neq 1$:

Využijeme přepis mocniny pomocí exponenciální funkce a přirozeného logaritmu:

$$q^n = e^{\log(q^n)} = e^{n \log q}$$

Protože se jedná o limitu složené funkce, začneme výpočtem limity vnitřní funkce, tedy exponentu $n \log q$.

- Je-li $0 < q < 1$, pak $\log q < 0$ (logaritmus je záporný). Limita exponentu je tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log q = -\infty$. Odtud plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log q} = 0$.
- Je-li $q > 1$, pak $\log q > 0$ (logaritmus je kladný). Limita exponentu je $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log q = \infty$, a proto $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log q} = \infty$.

2. Příklad $q < 0$:

Nyní uvažujme záporná q .

- Je-li $-1 < q < 0$, pak pro absolutní hodnotu platí $|q| \in (0, 1)$. Z předchozího kroku víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. Nyní využijeme známé tvrzení, že posloupnost má nulovou limitu právě tehdy, když má nulovou limitu posloupnost jejích absolutních hodnot:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$, dostáváme okamžitě, že i $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

- Je-li $q \leq -1$, limita neexistuje. Posloupnost osciluje se střídavými znaménky (například pro $q = -1$ dostáváme hodnoty $1, -1, 1, -1, \dots$).

Díky těmto poznatkům se můžeme vrátit k limitě částečného součtu $s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Pokud $|q| < 1$, pak $q^n \rightarrow 0$ a výraz se zjednoduší na konečnou hodnotu.

Součet nekonečné geometrické řady

Nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ **konverguje** právě tehdy, když platí $|q| < 1$.
Její součet je v takovém případě roven:

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

Pro $|q| \geq 1$ řada diverguje (případně osciluje).

Vzorec pro součet nekonečné geometrické řady jsme pro kladný kvocient odvodili s použitím exponenciální a logaritmické funkce. Ukážeme alternativní důkaz pomocí Bernoulliovy nerovnosti, kterou nejdříve zformulujeme a dokážeme.

Bernoulliova nerovnost

Nechť $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ dostaneme platnou nerovnost $(1 + h)^1 \geq 1 + 1 \cdot h$.

Předpokládejme, že nerovnost platí pro n a vynásobme ji nezáporným výrazem $1 + h$. Dostaneme

$$(1 + h)^n(1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h)$$

Pravou stranu nerovnice roznásobíme, na levé straně použijeme vzorec pro součin mocnin se stejným základem.

$$(1 + h)^{n+1} \geq 1 + nh + h + nh^2$$

Protože $nh^2 \geq 0$, je pravá strana $1 + nh + h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$ a odtud dostaneme nerovnost pro $n + 1$

$$(1 + h)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)h$$

Nyní vyjádříme kvocient geometrické řady q pomocí h : $q = 1 + h$. Pro $q > 1$ je $h > 0$ a odtud a z věty o aritmetice limit plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$.

Nyní použijeme

- Bernoulliovu nerovnost, která pro kladné h platí,
- větu o limitě sevřené funkce (protože je limita „dolního policajta“ $1 + nh$ rovna nekonečnu, nepotřebujeme horního policajta).

Dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h)^n = \infty$$

Dostali jsme tedy, že pro $q > 1$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

Uvažujme nyní $q \in (0, 1)$. Pak je $1/q > 1$ a z výše odvozeného plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \infty$$

Vyjádříme $q = 1/(1/q)$ a použijeme větu o aritmetice limit. Dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/q^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

a tedy pro $q \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

2.2 Řešené a neřešené úlohy

Vrátíme se k motivačním příkladům z 1.1.

Nejdříve zformulujeme úlohy na procvičení úplně základních pojmů jako člen řady a částečný součet řady. Řešení necháme na čtenáři s tím, že definice najde v kapitole 1.2.

Poté vybereme z příkladů 1.1 ty, které obsahují geometrické řady. Ukážeme, že tyto řady konvergují a vypočteme jejich součty.

Úkol

Pro každou řadu z úloh 1, 3, 4, 5, 7 z kapitoly 1.1 určete pátý člen řady a druhý částečný součet řady.

Sčítání nekonečných geometrických řad

Vypočteme součty řad z příkladů 1 až 4 z úvodní kapitoly.

1.

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

První člen je $a_1 = 9/10$, kvocient je $1/10$. Protože je $|q| = 0.1 < 1$, geometrická řada konverguje a platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{9/10}{1 - 1/10} = 1$$

2.

$$\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots$$

První člen je $a_1 = R/(1+i)$, kvocient je $q = 1/(1+i)$. Předpokládáme, že úroková míra i nabývá kladných hodnot. Pak $q \in (0, 1)$, geometrická řada konverguje a platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{R/(1+i)}{1 - 1/(1+i)}$$

Po úpravě dostaneme $s = R/i$.

3.

$$1 + 2 \cdot (0.8) + 2 \cdot (0.8^2) + 2 \cdot (0.8^3) + \dots$$

Řada je geometrická až od druhého členu. Proto sečteme nejdříve tuto část a k výsledku přičteme první člen (jedničku). V geometrické řadě

$$2 \cdot (0.8) + 2 \cdot (0.8^2) + 2 \cdot (0.8^3) + \dots$$

je první člen $a_1 = 1.6$, kvocient je $q = 0.8$. Geometrická řada tedy konverguje a platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1.6}{1 - 0.8} = 8$$

I s prvním členem má tedy řada součet roven devíti.

Sčítání nekonečných geometrických řad

4.

$$100 + 100 \cdot 0.6 + 100 \cdot 0.6^2 + \dots + 100 \cdot 0.6^{n-1}$$

První člen je $a_1 = 100$, kvocient je $q = 0.6$. Geometrická řada tedy konverguje a platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{100}{1 - 0.6} = 250$$