Číselné řady

Martina Šimůnková ve spolupráci s LLM Gemini

24. března 2026

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Řada je v matematice dost neintuitivní pojem a často se zaměňuje s posloupností. Navíc se v jiných oborech používá pojem časová řada ve smyslu posloupnosti. Studentům se tyto pojmy hodně pletou, přestože se už na střední škole setkali s pojmy geometrická posloupnost, geometrická řada, aritmetická posloupnost, aritmetická řada. Proto je potřeba si „vtlouci“ do hlavy, že geometrická posloupnost je například $1, 1/2, 1/4, 1/8, \dots$, zatímco geometrická řada je například $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$, tedy součet.

Než přistoupíme k formálnímu výkladu, ukažme si několik situací z reálného světa, kde se s myšlenkou nekonečného součtu přirozeně setkáváme. Tyto příklady nám pomohou budovat intuici o tom, kdy má smysl nekonečně mnoho čísel sečíst a kdy to naopak vede k „explozi“ nebo zmatku.

1.1 Motivace: Kde všude v reálném světě potkáme nekonečno?

1. Magie čísel a školská praxe: Je $0,\overline{9}$ opravdu 1?

Jedna z nejčastějších otázek zvídavých žáků zní: *Jak může být číslo, které začíná nulou, rovno jedné?* Žáci často odmítají přijmout fakt, že $0,\overline{9} = 1$. Můžeme jim to však názorně ukázat pomocí nekonečného sčítání (nekonečné geometrické řady):

$$0,\overline{9} = 0,999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Právě studium řad nám v následujících kapitolách dá do ruky silný nástroj, jak dokázat, že tento součet skutečně konverguje přesně k hodnotě 1.

2. Finanční gramotnost: Perpetuita a složené úročení

Pokud si budeme každý měsíc ukládat 1 000 Kč na účet s garantovaným úrokem, tvoří naše vklady a jejich úročení posloupnost. Co kdybychom však chtěli dostávat stabilní rentu „navždy“ (tzv. perpetuita)? Jakou hodnotu má takový slib dnes? Výpočet současné hodnoty budoucích nekonečných výnosů vede přímo na součet nekonečné geometrické řady:

$$S = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots$$

kde R je renta a i je úroková míra. Bez znalosti řad by moderní finanční matematika nemohla fungovat.

3. Fyzika a sport: Dráha skákajícího míčku

Pustíme gumový míček z výšky 1 metru. Po každém dopadu ztratí část své kinetické energie a vyskočí jen do 80 % předchozí výšky. Kolikrát se odrazí, než se úplně zastaví? Teoreticky nekonečněkrát. Jakou ale urazí celkovou dráhu? Dráha se skládá z letu dolů a nahoru:

$$s = 1 + 2 \cdot (0{,}8) + 2 \cdot (0{,}8^2) + 2 \cdot (0{,}8^3) + \dots$$

Ačkoliv proces obsahuje nekonečně mnoho kroků, celková dráha je konečná (řada konverguje). Toto je klasická ukázka toho, že nekonečno nemusí nutně znamenat „nekonečně velký výsledek“.

4. Lékařství: Dávkování léků v těle

Pacient dostane 100 mg léku. Během 8 hodin tělo odbourá 40 % účinné látky (zůstane 60 %). Za 8 hodin si pacient vezme dalších 100 mg. Pokud bude pacient brát léky dlouhodobě, poroste množství látky v těle do nekonečna (a dojde k otravě), nebo se ustálí na nějaké bezpečné hladině? Množství látky v těle těsně po podání n-té dávky tvoří částečný součet řady:

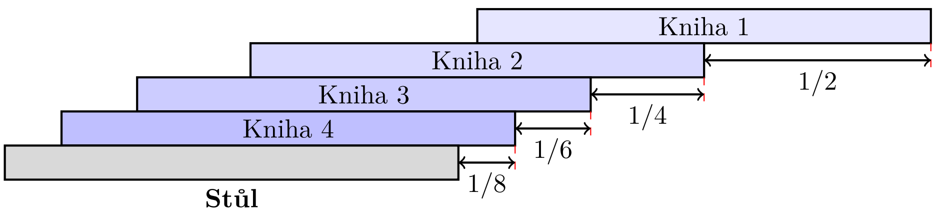
$$100 + 100 \cdot 0{,}6 + 100 \cdot 0{,}6^2 + \dots + 100 \cdot 0{,}6^{n-1}$$

Díky tomu, že kvocient je menší než 1, hladina léku v těle se ustálí.

5. Architektura a hlavolamy: Věž z knih

Představte si hromadu stejných učebnic. Chcete je vyskládat na sebe tak, aby horní kniha přečnívala co nejdále za hranu stolu, ale aby věž nespadla. Lze posunout těžiště tak, aby horní kniha byla úplně celá mimo stůl? A šlo by to posunout až na druhou stranu místnosti?

Aby byla stavba stabilní a zároveň co nejdelší, musí těžiště všech knih nad danou knihou ležet přesně na její hraně. Postupným skládáním získáme následující model:



Fyzikální rozbor posunů těžiště nás přivede k řadě:

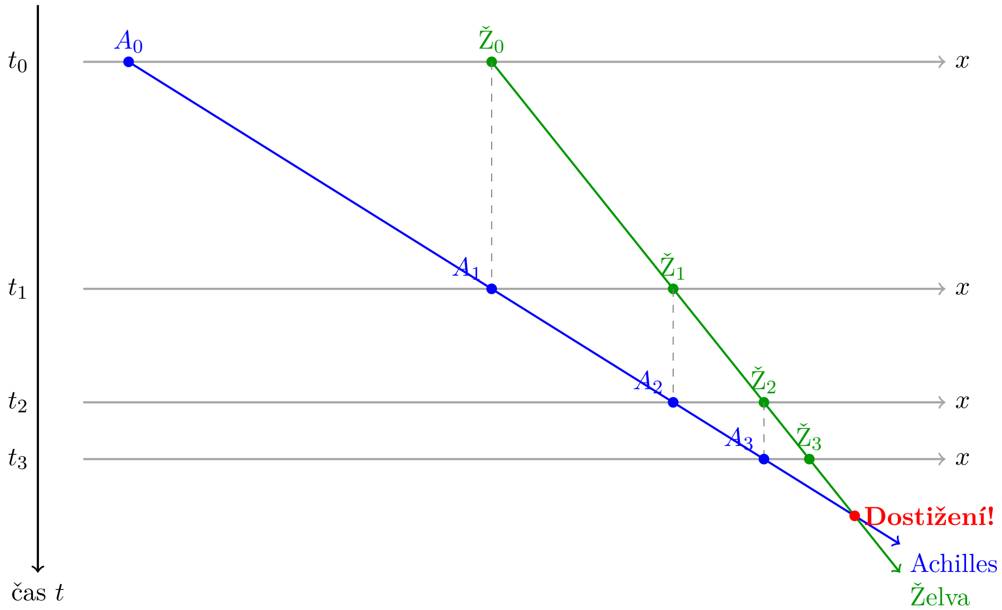
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right)$$

Výraz v závorce je tzv. **harmonická řada**. Jak si později ukážeme, tato řada diverguje (její součet roste nade všechny meze). Překvapivá odpověď tedy zní: s dostatečným počtem knih postavíte most klidně přes celý oceán![1]

6. Zenonův paradox: Achilles a želva

Slavný antický paradox popisuje závod rychlého Achilla a pomalé želvy, která dostane náskok. Zenon z Eleje tvrdil, že Achilles želvu nikdy nedohoní. Jeho úvaha zněla takto: Než Achilles doběhne na místo, odkud želva startovala, želva se posune o kousek dál. Než Achilles překoná tento nový kousek, želva se opět o něco posune. Tento proces se opakuje donekonečna.

[1]Tady je jazykový model Gemini hodně optimistický. Již z náčrtku lze odhadnout, že by tento most byl nepřijatelně vysoký.



V čem Zenon chyboval? Zenonův omyl spočíval v tom, že čas potřebný k dohonění želvy (což je ve skutečnosti konečně dlouhý úsek) uměle rozdělil na nekonečně mnoho stále se zkracujících časových intervalů. Z faktu, že těchto intervalů je *nekonečně mnoho*, chybně vyvodil, že jejich součet musí být *nekonečný* (tedy že Achilles želvu nedohoní v konečném čase). Jak ale uvidíme u geometrických řad, součet nekonečně mnoha kladných čísel (v tomto případě časových úseků) může být konečný!

7. Záludný vypínač a klamy nekonečna (Grandiho řada)

Máte vypínač. Zmáčknutí znamená +1 (světlo), další zmáčknutí −1 (tma). Začnete s nulou a mačkáte donekonečna:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Bude na konci rozsvíceno, nebo zhasnuto? Pokud bychom použili neopatrné uzávorkování, mohli bychom tvrdit, že součet je $(1-1)+(1-1)+\dots = 0$. Jiné uzávorkování $1-(1-1)-(1-1)\dots$ dává 1. Tento příklad slouží jako důležité varování (kterému se budeme věnovat v kapitole 3): **s nekonečnem nelze provádět běžné algebraické úpravy tak, jak jsme zvyklí u konečných součtů**.

Úlohy k zamyšlení

1. **Rozpoznání řady:** Pozorně si přečtěte příklady 1, 2, 3 a 4, uvědomte si, že pojednávají o geometrických řadách a pro každý z příkladů určete, jaký je kvocient příslušné geometrické řady.

2. **Řady ve vašem světě (Tvořivá úloha):** Vymyslete reálnou situaci z oblasti vašeho zájmu (může to být jiný studijní obor, sport, koníček nebo specifický pedagogický problém), která se dá modelovat pomocí matematické řady.

   - Popište situaci: Co přesně představují jednotlivé sčítance a_k?
   - Dává ve vašem modelu smysl uvažovat o řadě konečné, nebo nekonečné?
   - Zkuste odhadnout (intuitivně nebo matematicky), zda vaše řada konverguje (blíží se k limitní hodnotě), diverguje (roste do nekonečna), nebo osciluje. Dává tento matematický výsledek smysl i v kontextu vaší reálné situace?

1.2 Základní pojmy: Posloupnost vs. Řada

Definice

Mějme posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme řadou, čísla a_k nazýváme členy řady. **Posloupností částečných součtů** (s_n) této řady rozumíme:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (vlastní nebo nevlastní), říkáme, že **řada má součet** s a značíme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. V opačném případě říkáme, že **řada osciluje**.
Pokud je s konečné číslo, říkáme, že **řada konverguje**. V opačném případě říkáme, že řada **diverguje** (zahrnuje řady, které oscilují i řady s nekonečným součtem).

Didaktická poznámka

Metafora hromady písku:
Studentům se pojmy pletou. Představte si, že stavíte hromadu z písku.

- **Posloupnost** a_n odpovídá tomu, *kolik písku přisypu* v n-tém kroku.
- **Částečný součet** s_n je, *jak velká je hromada* po n krocích.

Konvergence znamená, že i když sypeme donekonečna, hromada nepřeroste určitou výšku. Nutnou podmínkou pochopitelně je, že velikost přidávaných lopatek písku se musí zmenšovat k nule ($\lim a_n = 0$).

Příklad

Řada
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$
má třetí člen roven $1/3$, dvanáctý člen roven $-1/12$ a třetí částečný součet má roven $1 - 1/2 + 1/3 = 5/6$.

1.3 Nutná podmínka konvergence

Následující věta udává podmínku, bez jejíhož splnění konvergence vůbec nemůže nastat.

Nutná podmínka konvergence

Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz:
Označme S konečný součet konvergentní řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = S$. Zároveň platí zřejmý vztah pro k-tý člen: $a_k = s_k - s_{k-1}$ (pro $k > 1$). Z limitního přechodu dostáváme:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = S - S = 0$$

O slovu "nutná"

Proč větě říkáme *nutná* podmínka? Znamená to, že je nezbytná (nutná) pro konvergenci. Pokud limita členů není nula, řada nemá šanci konvergovat. **Není to však podmínka postačující!** Pokud limita členů k nule jde, vůbec to neznamená, že řada konverguje. Později se seznámíme s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{k}$, která je dokonalým varovným příkladem: zjevně platí $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, a přesto uvidíme, že řada diverguje.

Příklady

1. Geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k$ není konvergentní a nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
2. Geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} 0.2^k$ je konvergentní a splňuje nutnou podmínku konvergence.
3. Harmonická řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ není konvergentní a splňuje nutnou podmínku konvergence.

Kapitola 2

Geometrická řada

2.1 Definice geometrické řady

V předchozích motivačních příkladech jsme často naráželi na situaci, kdy se sčítance postupně zmenšovaly vždy o stejný násobek. Tento typ řady je v matematice natolik fundamentální, že se jím budeme zabývat podrobněji.

Definice geometrické řady

Nechť $a_1 \in \mathbb{R}$ a $q \in \mathbb{R}$. **Geometrickou řadou** nazýváme řadu tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické řady. Pro n-tý člen této řady platí $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

2.2 Částečný součet geometrické řady

Zkoumejme nejprve konečný součet prvních n členů geometrické řady, tedy n-tý částečný součet s_n. Máme rovnici:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \tag{2.1}$$

Abychom tento součet upravili do uzavřeného tvaru, využijeme elegantní algebraický trik. Vynásobíme celou rovnici kvocientem q:

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \tag{2.2}$$

Nyní odečteme rovnici (2.2) od rovnice (2.1). Všimněte si, že většina členů na pravé straně se vzájemně odečte a zbude pouze první člen z první rovnice a poslední člen z druhé rovnice:

$$s_n - q \cdot s_n = a_1 - a_1 q^n$$

Vytkneme s_n na levé straně a a_1 na pravé straně:

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Pokud $q \neq 1$, můžeme rovnici vydělit výrazem $(1 - q)$ a získáme vzorec pro částečný součet. Pokud $q = 1$, pak sčítáme n-krát stejné číslo a_1, takže $s_n = n \cdot a_1$.

Částečný součet geometrické řady

Pro n-tý částečný součet geometrické řady s kvocientem $q \neq 1$ platí:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

V případě $q = 1$ platí

$$s_n = na_1$$

Trik s posunem a odečtením

Tento odvozovací trik (vynásobení kvocientem a odečtení) je jedním z nejužitečnějších obratů, které můžete středoškolákům ukázat. Není to jen „vzoreček z tabulek k naučení zpaměti", ale logický postup. Stejný princip se učí už na základní škole při převodu periodického čísla na zlomek (kdy např. rovnici $x = 0,\overline{3}$ vynásobíme 10 a odečteme původní x). Znalost samotného triku je mnohem cennější než znalost výsledného vzorce.

2.3 Součet geometrické řady

Abychom zjistili, zda má nekonečná geometrická řada součet, musíme prozkoumat chování posloupnosti částečných součtů (s_n) pro n rostoucí nade všechny meze. Matematicky to znamená vypočítat limitu pro $n \to \infty$:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

Protože první člen a_1 a kvocient q jsou pevně daná čísla nezávislá na n, jediná část celého výrazu, která se s rostoucím indexem mění, je mocnina q^n. Pomocí vět o aritmetice limit můžeme zápis přehledně upravit na tvar:

$$s = a_1 \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right)$$

Celý osud naší nekonečné řady tedy závisí na jediné limitě: $\lim_{n\to\infty} q^n$.

Limita q^n

Pro $q = 0$ je zjevně limita 0. Pro $q = 1$ je limita 1, částečný součet je $s_n = n \cdot a_1$ a řada diverguje (za předpokladu $a_1 \neq 0$).

1. Případ $q > 0, q \neq 1$:

Využijeme přepis mocniny pomocí exponenciální funkce a přirozeného logaritmu:

$$q^n = e^{\log(q^n)} = e^{n \log q}$$

Protože se jedná o limitu složené funkce, začneme výpočtem limity vnitřní funkce, tedy exponentu $n \log q$.

- Je-li $0 < q < 1$, pak $\log q < 0$ (logaritmus je záporný). Limita exponentu je tedy $\lim_{n\to\infty} n \log q = -\infty$. Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} e^{n \log q} = 0$.
- Je-li $q > 1$, pak $\log q > 0$ (logaritmus je kladný). Limita exponentu je $\lim_{n\to\infty} n \log q = \infty$, a proto $\lim_{n\to\infty} e^{n \log q} = \infty$.

2. Případ $q < 0$:

Nyní uvažujme záporná q.

- Je-li $-1 < q < 0$, pak pro absolutní hodnotu platí $|q| \in (0,1)$. Z předchozího kroku víme, že $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Nyní využijeme známé tvrzení, že posloupnost má nulovou limitu právě tehdy, když má nulovou limitu posloupnost jejích absolutních hodnot:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

  Protože $\lim_{n\to\infty} |q^n| = \lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$, dostáváme okamžitě, že i $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

- Je-li $q \le -1$, limita neexistuje. Posloupnost osciluje se střídavými znaménky (například pro $q = -1$ dostáváme hodnoty $1, -1, 1, -1, \dots$).

Výpočty přehledně shrneme.

Shrnutí hodnot limity q^n

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } q \in (-1,1) \\ 1 & \text{pro } q = 1 \\ \infty & \text{pro } q > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

Limita q^n a Bernoulliova nerovnost

Limitu q^n jsme pro kladný kvocient odvodili s použitím exponenciální a logaritmické funkce. Tento postup je sice rychlý, ale opírá se o pokročilejší aparát, jako je například limita složené funkce. Vzhledem k tomu, že s geometrickou posloupností a řadou se studenti setkávají už na střední škole, ukážeme si nyní alternativní a metodicky cennější důkaz. Ten se vyhýbá logaritmům a opírá se pouze o elementární algebru a větu o limitě sevřené funkce (tzv. větu „o dvou policajtech“). Klíčem k tomuto elegantnímu řešení je Bernoulliova nerovnost, kterou si nejdříve zformulujeme a dokážeme.

Bernoulliova nerovnost

Nechť $h \ge -1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí $(1+h)^n \ge 1 + nh$.
Důkaz provedeme matematickou indukcí.
Pro $n = 1$ dostaneme platnou nerovnost $(1+h)^1 \ge 1 + 1 \cdot h$.
Předpokládejme, že nerovnost platí pro n a vynásobme ji nezáporným výrazem $1 + h$. Dostaneme

$$(1+h)^n(1+h) \ge (1+nh)(1+h)$$

Pravou stranu nerovnice roznásobíme, na levé straně použijeme vzorec pro součin mocnin se stejným základem.

$$(1+h)^{n+1} \ge 1 + nh + h + nh^2$$

Protože $nh^2 \ge 0$, je pravá strana $1 + nh + h + nh^2 \ge 1 + (n+1)h$ a odtud dostaneme nerovnost pro $n + 1$

$$(1+h)^{n+1} \ge 1 + (n+1)h$$

Nyní vyjádříme kvocient geometrické řady q pomocí h: $q = 1 + h$. Pro $q > 1$ je $h > 0$ a odtud a z věty o aritmetice limit plyne $\lim_{n\to\infty}(1 + nh) = \infty$.

Nyní použijeme

- Bernoulliovu nerovnost, která pro kladné h platí,

- větu o limitě sevřené funkce (protože je limita „dolního policajta“ $1+nh$ rovna nekonečnu, nepotřebujeme horního policajta).

Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}(1+h)^n = \infty$$

Dostali jsme tedy, že pro $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Uvažujme nyní $q \in (0,1)$. Pak je $1/q > 1$ a z výše odvozeného plyne

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n = \infty$$

Vyjádříme $q = 1/(1/q)$ a použijeme větu o aritmetice limit. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/q^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

a tedy pro $q \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Součet nekonečné geometrické řady

Výše jsme odvodili vzorec pro částečný součet geometrické řady, který obsahoval mocninu kvocientu q^n a odvodili jsme její limitu. Nyní můžeme tyto dva dílčí poznatky spojit. Víme, že součet nekonečné geometrické řady s je z definice roven limitě posloupnosti jejích částečných součtů pro $n \to \infty$:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

Z předchozího rozboru limit víme, že pro kvocient v intervalu $(-1,1)$, tedy pro $|q| < 1$, platí $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Pokud tuto limitu aplikujeme na náš vzorec pro částečný součet a využijeme větu o aritmetice limit, získáme konečný výsledek:

$$s = a_1\frac{1-0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

Naopak pro $|q| \geq 1$ řada diverguje, přitom pro $q \geq 1$ má nekonečný součet a pro $q \leq -1$ řada osciluje. V takovém případě limita částečných součtů nevede ke konečnému reálnému číslu. Tento klíčový výsledek nyní formálně shrneme.

Ve shrnutí předpokládáme, že první člen řady a_1 je nenulový. Pro $a_1 = 0$ by totiž řada sestávala ze samých nul a konvergovala by k součtu 0 pro jakoukoliv hodnotu kvocientu q. Podmínka $|q| < 1$ by pak pro konvergenci nebyla nutná.

Součet nekonečné geometrické řady

Nechť $a_1 \neq 0$. Pak nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ **konverguje** právě tehdy, když platí $|q| < 1$. Její součet je v takovém případě roven:

$$s = \frac{a_1}{1-q}$$

Pro $|q| \geq 1$ řada diverguje, přitom pro $q \geq 1$ má nekonečný součet a pro $q \leq -1$ řada osciluje.

2.4 Řešené a neřešené úlohy

Vrátíme se k motivačním příkladům z 1.1.

Nejdříve zformulujeme úlohy na procvičení úplně základních pojmů jako člen řady a částečný součet řady. Řešení necháme na čtenáři s tím, že definice najde v kapitole 1.2.

Poté vybereme z příkladů 1.1 ty, které obsahují geometrické řady. Ukážeme, že tyto řady konvergují a vypočteme jejich součty.

Úkol

Pro každou řadu z úloh 1, 3, 4, 5, 7 z kapitoly 1.1 určete pátý člen řady a druhý částečný součet řady.

Sčítání nekonečných geometrických řad

Vypočteme součty řad z příkladů 1 až 4 z úvodní kapitoly.

1.
$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\dots$$
První člen je $a_1 = 9/10$, kvocient je $1/10$. Protože je $|q| = 0.1 < 1$, geometrická řada konverguje a platí
$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{9/10}{1-1/10}=1$$

2.
$$\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\dots$$
První člen je $a_1 = R/(1+i)$, kvocient je $q = 1/(1+i)$. Předpokládáme, že úroková míra i nabývá kladných hodnot. Pak $q \in (0, 1)$, geometrická řada konverguje a platí
$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{R/(1+i)}{1-1/(1+i)}$$
Po úpravě dostaneme $s = R/i$.

3.
$$1+2\cdot(0.8)+2\cdot(0.8^2)+2\cdot(0.8^3)+\dots$$
Řada je geometrická až od druhého členu. Proto sečteme nejdříve tuto část a k výsledku přičteme první člen (jedničku). V geometrické řadě
$$2\cdot(0.8)+2\cdot(0.8^2)+2\cdot(0.8^3)+\dots$$
je první člen $a_1 = 1.6$, kvocient je $q = 0.8$. Geometrická řada tedy konverguje a platí
$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1.6}{1-0.8}=8$$
I s prvním členem má tedy řada součet roven devíti.

Sčítání nekonečných geometrických řad – pokračování

4.
$$100 + 100 \cdot 0.6 + 100 \cdot 0.6^2 + \cdots +$$

První člen je $a_1 = 100$, kvocient je $q = 0.6$. Geometrická řada tedy konverguje a platí

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{100}{1-0.6} = 250$$

Kapitola 3

Problémy s nekonečnem

3.1 Varovné příklady

Uvedeme tři příklady, které nás poučí, že s nekonečnými součty musíme zacházet opatrně.

Geometrická řada

Uvažujme geometrickou řadu

$$s = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

Vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s = 1 + \frac{8s}{7}$, odkud dostaneme $s = -7$. Dostali jsme, že součet kladných čísel je roven číslu zápornému a to je divné.

Ukážeme, že vynásobení řady číslem je korektní operace. I odvozená rovnost $s = 1 + \frac{8s}{7}$ platí. Chybné je až řešení rovnice. Protože je $s = \infty$, není definovaný rozdíl $s - \frac{8s}{7}$.

Věta o násobení řady člen po členu

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada, $s \in \mathbb{R}^*$ je její součet, $\alpha \in \mathbb{R}$ je číslo a nechť je definováno αs (tj. buď je $s \in \mathbb{R}$, nebo je $\alpha \neq 0$).
Pak má řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ součet αs.

Důkaz.
Pro součty konečně mnoha čísel plyne tvrzení z distributivního zákona

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots a_n) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots \alpha a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k$$

Odtud pro součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Další varovný příklad (harmonická řada)

Uvažujme řadu

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{3.1}$$

a vydělme ji člen po členu dvěma

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots . \tag{3.2}$$

Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne (odečteme (3.2) od (3.1))

$$\frac{s}{2} = s - \frac{s}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots . \tag{3.3}$$

A odtud dostaneme odečtením řady (3.2) od řady (3.3)

$$0 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Dostáváme další zvláštní výsledek – součet kladných čísel (pokud přičítáme výsledky závorek, které jsou kladné) je roven nule.

Zde první operace je opět násobení řady člen po členu číslem $1/2$, a je tedy korektní. Druhá operace odpovídá vložení nul

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \cdots .$$

a odečtení od řady (3.1) člen po členu.

Vložení nul převede posloupnost částečných součtů

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

na posloupnost

$$0, s_1, s_1, s_2, s_2, s_3 \cdots$$

která má stejnou limitu a tedy ani tato operace nezmění součet řady.

Další operace odčítá dvě řady. Níže ukážeme, že tato operace je korektní v případě, že je rozdíl řad definovaný. Pokud je $s \in \mathbb{R}$, tedy řada je konvergentní, je rozdíl $s - s/2$ definovaný. Ve výše uvedeném případě je $s = \infty$, jak později dokážeme a rozdíl $s - s/2$ v tomto případě definovaný není.

V následující větě zformulujeme a dokážeme tvrzení o sčítání řady člen po členu. Rozdíl rozdíl $s - s/2$ pak můžeme napsat jako součet $s + (-1/2)s$ a tím ukázat platnost věty i pro rozdíl.

Věta o sčítání řady člen po členu

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou řady se součty $A, B \in \mathbb{R}^*$, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

Nechť je definován součet $A+B$ (tj alespoň jeden ze součtů A, B je konečný, nebo je $A = B$; nenastane tedy případ $A = \infty$, $B = -\infty$, ani $A = -\infty$, $B = \infty$). Pak má řada $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ součet a platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = A + B$$

Důkaz.
Pro součty konečně mnoha čísel použijeme komutativní a asociativní zákona

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Odtud pro součet řady $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ plyne

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

Z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Příklad na přerovnání členů řady

Uvažujme řadu

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s}{2} = s + \frac{s}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy a přidanými nulami. Proto platí $s = \frac{3s}{2}$. Je to pravda?

Zde jsou všechny operace s řadami korektní. Sčítáme řady, které mají součet s, $s/2$, proto je souičet $s + s/2$ definován. Problém je tady v samotné řadě. Součet kladných členů řady je plus nekonečno a součet záporných členů řady je mínus nekonečno. V takovém případě můžeme pouhým přerovnáním členů řady změnit její součet na libovolné číslo. Neplatí tedy v tomto případě pro nekonečné součty komutativní a asociativní zákon.

3.2 Věta o aritmetice řad

V následující větě shrneme poznatky z předchozích kapitol.

Věta o aritmetice řad

Nechť $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $c, d \in \mathbb{R}$. Nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mají součty $A, B \in \mathbb{R}^*$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$$

Pak za předpokladu, že je pravá strana rovnosti definovaná, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B \tag{3.4}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = A - B \tag{3.5}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = cA \tag{3.6}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k + db_k) = cA + dB \tag{3.7}$$

Důkaz (3.4), (3.6) jsme udělali výše (věta o sčítání řady člen po členu a věta o násobení řady člen po členu). Z těchto dvou vztahů pak plyne i (3.7).

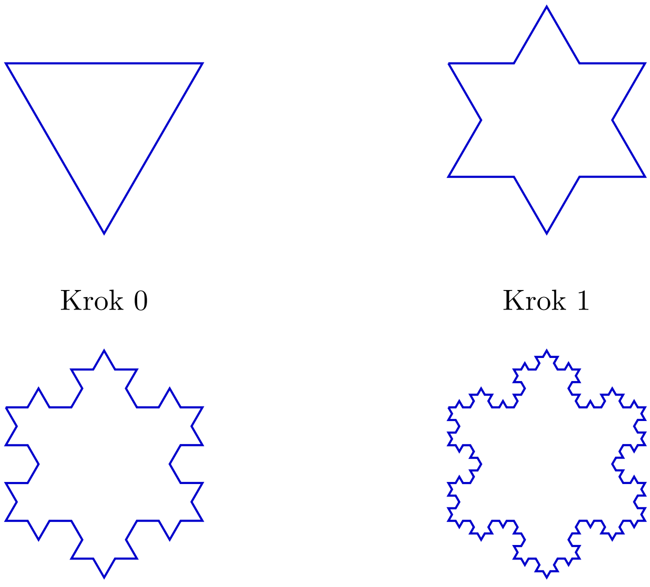
Volbou $c = 1$, $d = -1$ v (3.7) pak dostaneme (3.5).

3.3 Kochova sněhová vločka: Konečná plocha, nekonečný obvod

V předchozích částech jsme si ukázali paradoxy spojené s přerovnáváním alternujících řad. Další fascinující „problém s nekonečnem“ pochází z geometrie a ukazuje nám, jak zrádná může být naše intuice ohledně délky a obsahu. Představme si fraktál známý jako Kochova sněhová vločka.

Tento obrazec sestrojíme následovně: Začneme s rovnostranným trojúhelníkem (Krok 0). V každém dalším kroku vezmeme každou rovnou úsečku, rozdělíme ji na třetiny, prostřední třetinu odstraníme a nahradíme ji dvěma novými úsečkami, které tvoří špičku menšího rovnostranného trojúhelníku směřujícího ven.

Když tento proces budeme opakovat do nekonečna, vznikne nesmírně členitý a „chlupatý“ obrazec. Zkusme se nyní pomocí našich znalostí nekonečných řad podívat na to, jaký bude mít tento objekt obvod a jaký obsah.



Obrázek 3.1: První čtyři fáze konstrukce Kochovy sněhové vločky. Ostré „výstupky“ přibývají do nekonečna.

Obvod Kochovy sněhové vločky

Kochova sněhová vločka má nekonečný obvod.

Důkaz (náznak):
Označme O_0 obvod původního trojúhelníku. V každém kroku nahrazujeme každou úsečku o délce L lomenou čarou, která se skládá ze čtyř úseček o délce $L/3$. Její nová délka je tedy $\frac{4}{3}L$. To platí pro všechny úsečky na obvodu, takže celý obvod se v každém kroku zvětší o činitel $4/3$. Pro n-tý krok platí obvod: $O_n = O_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Protože je to geometrická posloupnost s kvocientem $q = 4/3 > 1$, platí $\lim_{n\to\infty} O_n = \infty$.

Obsah Kochovy sněhové vločky

Kochova sněhová vločka má konečný obsah, který je roven přesně $\frac{8}{5}$ obsahu původního trojúhelníku.

Důkaz (náznak):
Označme S_0 obsah původního trojúhelníku. V každém kroku přidáváme na každou úsečku malý trojúhelníček. Délka strany tohoto nového trojúhelníčku je vždy $1/3$ délky strany trojúhelníčku z předchozího kroku, jeho obsah je tedy $(1/3)^2 = 1/9$ obsahu předchozího. V 1. kroku přidáme 3 trojúhelníčky, každý o obsahu $\frac{1}{9}S_0$. Ve 2. kroku přidáme malé trojúhelníčky na všech $3 \cdot 4 = 12$ nových stran, takže jich bude $3 \cdot 4^1$. Obecně v n-tém kroku přidáváme $3 \cdot 4^{n-1}$ trojúhelníčků, z nichž každý má obsah $S_0 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$. Celkový obsah S je tedy dán nekonečnou řadou:

$$S = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3 \cdot 4^{n-1} \cdot S_0 \cdot \frac{1}{9^n} \right] = S_0 + \frac{3}{4} S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Máme zde součet geometrické řady s kvocientem $q = 4/9$. Její součet je $\frac{4/9}{1-4/9} = \frac{4/9}{5/9} = \frac{4}{5}$.

Když tento součet dosadíme zpět, dostaneme:

$$S = S_0 + \frac{3}{4}S_0 \cdot \frac{4}{5} = S_0 + \frac{3}{5}S_0 = \frac{8}{5}S_0$$

Obsah vločky je tedy konečný.

Pedagogický paradox pro studenty

Tento objekt je pro studenty naprostým šokem. Ukazuje, že existuje 2D útvar, který **má konečnou plochu** (přeloženo do reality: k jeho vybarvení by nám stačilo konečné množství barvy), ale **má nekonečný obvod** (kdybychom chtěli obtáhnout jeho hranici tužkou, nikdy to nedokončíme, ani kdybychom měli nekonečně dlouhý život). Kochova křivka je skvělý způsob, jak studentům dokázat, že v matematice nekonečna nesmí spoléhat pouze na svůj „selský rozum“ odvozený z konečných každodenních zkušeností. To, co je „uzavřeno na malém papíře“, může v sobě skrývat nekonečno.

Výzva

Vystřihněte v papíru velikosti A4 otvor tak, abyste se dokázali tímto otvorem protáhnout.

Kapitola 4

Řady s nezápornými členy

Tato kapitola je věnována řadám, jejichž všechny členy jsou nezáporná čísla. Tato vlastnost nám umožní odvodit řadu silných nástrojů pro určování konvergence. Než k nim ale přistoupíme, seznámíme se s jednou z nejdůležitějších řad vůbec.

4.1 Harmonická řada

Harmonická řada

Harmonická řada je řada tvaru:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Ačkoliv se členy této řady neustále zmenšují a blíží se k nule, uvidíme, že celkový součet roste nade všechny meze.

Divergence harmonické řady

Harmonická řada diverguje (její součet je $+\infty$).

Důkaz:
Uvažujme částečné součty harmonické řady. Vybereme z nich ty, jejichž index je mocninou dvojky ($s_1, s_2, s_4, s_8, \dots$), a členy vhodně uzávorkujeme:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Obecně pro n-tou mocninu dvojky platí $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Protože výraz $1 + \frac{n}{2}$ roste nade všechny meze pro $n \to \infty$, musí nutně k nekonečnu růst i vybraná posloupnost částečných součtů s_{2^n}. Celá posloupnost částečných součtů je rostoucí a není shora omezená, má tedy nevlastní limitu $+\infty$.

4.2 Existence součtu

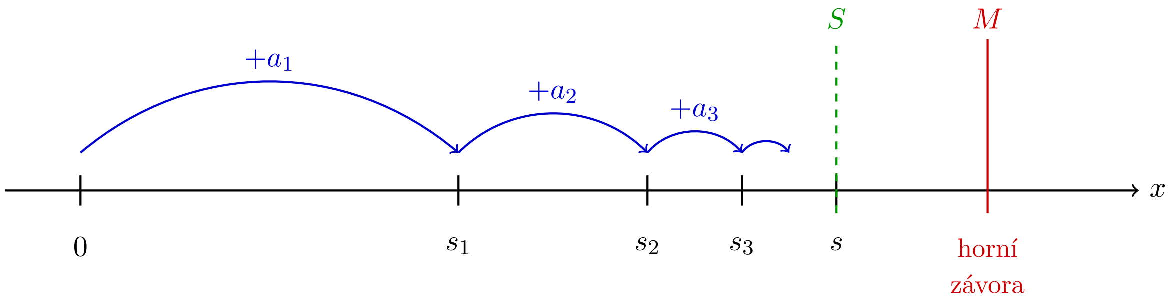
U řad s nezápornými členy se nám nemůže stát, že by posloupnost částečných součtů oscilovala.

Věta o existenci součtu

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s nezápornými členy ($a_k \geq 0$ pro všechna k). Pak tato řada má vždy součet. Tento součet je buď konečné nezáporné číslo (řada konverguje), nebo $+\infty$ (řada diverguje).

Důkaz:
Pro n-tý a $(n+1)$-ní částečný součet platí $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Protože $a_{n+1} \geq 0$, platí $s_{n+1} \geq s_n$. Posloupnost částečných součtů (s_n) je tedy neklesající. Z vlastností posloupností víme, že každá neklesající posloupnost má limitu. Je-li shora omezená, má vlastní limitu; není-li omezená, má nevlastní limitu $+\infty$.

Důkaz je ilustrovám na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Posloupnost částečných součtů řady s nezápornými členy ($a_n \geq 0$). Vzhledem k tomu, že přičítáme pouze nezáporné hodnoty, posloupnost částečných součtů s_n je neklesající (skoky směřují vždy doprava). Pokud pro tuto posloupnost existuje nějaká horní závora M, hodnoty se nemohou zvětšovat do nekonečna a musí se nutně blížit k vlastní limitě S (kde $S \leq M$). Řada tedy konverguje.

4.3 Konvergence řady převrácených hodnot kvadrátů

Podívejme se na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Členy klesají k nule rychleji než u harmonické řady, což nám dává naději na konvergenci. Abychom to dokázali, pomůžeme si nejprve jinou řadou.

Uvažujme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Pomocí parciálních zlomků můžeme každý člen zapsat jako rozdíl: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Nyní se podívejme na n-tý částečný součet:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Tato tzv. „teleskopická“ řada se nám krásně odečetla. Limita pro $n \to \infty$ je $\lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Řada tedy konverguje a její součet je 1.

Vraťme se k naší zkoumané řadě. Pro každé $k \geq 2$ platí $k^2 > k(k-1) > 0$, a tedy pro převrácené hodnoty:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

Příslušný částečný součet zkoumané řady můžeme odhadnout (první člen oddělíme):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \tag{4.1}$$

Posunutím indexu $l = k - 1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l+1)l}$$

Výše jsme odvodili

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l+1)l} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

Dosazením do (4.1) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum \frac{1}{k^2}$ je rostoucí (členy jsou kladné) a shora omezená číslem 2. Podle věty o limitách a nerovnostech tato posloupnost má konečnou limitu, a proto **řada konverguje** a její součet je nejvýše roven dvěma (její přesný součet je mimochodem $\frac{\pi^2}{6}$, což odvodil L. Euler).

4.4 Srovnávací kritérium

Myšlenku, kterou jsme právě použili, zobecníme do mocných nástrojů.

Srovnávací kritérium

Nechť $\sum a_k$ a $\sum b_k$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje index k_0 takový, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $a_k \leq b_k$.

1. Konverguje-li řada $\sum b_k$ (tzv. majoranta), konverguje i řada $\sum a_k$.
2. Diverguje-li řada $\sum a_k$ (tzv. minoranta), diverguje i řada $\sum b_k$.

Důkaz se provede analogicky jako u řady $\frac{1}{k^2}$ – ukáže se ohraničenost částečných součtů (pro konvergenci) nebo jejich neohraničenost (pro divergenci).

4.5 Řada $\sum 1/k^p$

S využitím našich znalostí o harmonické řadě a řadě kvadrátů můžeme nyní posoudit konvergenci velice užitečné třídy řad s parametrem p.

Konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

Řada tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr, konverguje pro $p > 1$ a diverguje pro $p \leq 1$.

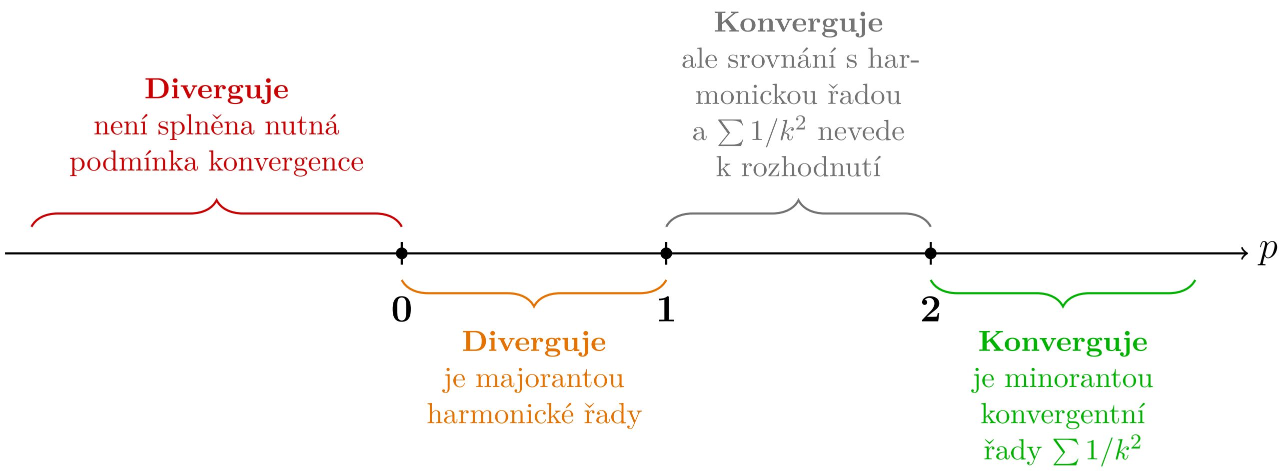
Hlavní myšlenky důkazu:
Rozdělíme si vyšetřování řady podle hodnoty parametru p:

- **Pro** $p \leq 0$: V tomto případě je $-p \geq 0$. Členy řady můžeme zapsat jako $\frac{1}{k^p} = k^{-p}$. Pokud $p = 0$, jsou všechny členy řady rovny 1, a tedy jejich limita je 1. Pokud $p < 0$, jedná se o mocninu s kladným exponentem a $\lim_{k\to\infty} k^{-p} = \infty$. V obou případech platí, že limita členů řady není nula. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada diverguje.

- **Pro** $0 < p \leq 1$: Zde využijeme srovnávací kritérium a naši znalost harmonické řady. Případ $p = 1$ je přímo harmonická řada, o které víme, že diverguje. Pro $0 < p < 1$ platí pro všechna přirozená k nerovnost $k^p \leq k^1 = k$. Přechodem k převráceným hodnotám se znak nerovnosti obrátí: $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$. Členy naší zkoumané řady jsou tedy větší než členy divergentní harmonické řady (naše řada je majorantou divergentní řady), a proto podle srovnávacího kritéria také diverguje.

- **Pro** $p \geq 2$: Opět použijeme srovnávací kritérium, tentokrát ale s řadou převrácených hodnot kvadrátů. Pro všechna přirozená k platí $k^p \geq k^2$. Pro převrácené hodnoty tedy platí $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$. O řadě $\sum \frac{1}{k^2}$ jsme v předchozí kapitole dokázali, že konverguje. Protože jsou členy naší zkoumané řady menší nebo rovny členům konvergentní řady (je její minorantou), zkoumaná řada podle srovnávacího kritéria také konverguje.

- **Pro** $1 < p < 2$: V tomto intervalu (například pro $p = 1{,}5$) platí $k < k^p < k^2$, a po přechodu k převráceným hodnotám dostáváme $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^p} < \frac{1}{k}$. Naše řada je svými členy „sevřena“ mezi konvergentní řadou $\sum \frac{1}{k^2}$ zdola a divergentní harmonickou řadou $\sum \frac{1}{k}$ shora. Srovnávací kritérium nám zde vůbec nepomůže, protože být „větší než konvergentní“ nebo „menší než divergentní“ řada neposkytuje o konvergenci žádnou informaci. Abychom zjistili, jak se řada chová pro $p \in (1, 2)$, musíme sáhnout po jiném nástroji. Konvergenci pro tato p lze elegantně dokázat pomocí tzv. integrálního kritéria, které dává do souvislosti konvergenci řady s konvergencí nevlastního integrálu $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x$.



Obrázek 4.2: Přehled chování řady $\sum \frac{1}{k^p}$ v závislosti na parametru p a použité srovnávací argumenty.

4.6 Limitní srovnávací kritérium

Protože odhadování nerovností může být početně těžkopádné, využívá se v praxi často elegantnější limitní varianta.

Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum a_k$ a $\sum b_k$ jsou řady, přitom řada $\sum b_k$ má nezáporné členy. Nechť existuje vlastní limita:

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Pokud $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak obě řady buď současně konvergují, nebo současně divergují.

K důkazu limitního srovnávacího kritéria použijeme následující lemma.

Lemma o nezávislosti konvergence na konečném počtu členů

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je číselná řada a $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolný index. Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.
(Jinými slovy: Vynecháním, přidáním nebo změnou konečného počtu členů řady se její konvergence či divergence nezmění. Pokud řada konverguje, změní se tímto zásahem pouze hodnota jejího součtu.)

Důkaz:
Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ n-tý částečný součet původní řady. Pro $n \geq n_0$ můžeme tento částečný součet rozdělit na dvě části:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

První suma na pravé straně představuje součet prvních $n_0 - 1$ členů. Tento součet nezávisí na n, jedná se o pevně dané reálné číslo (označme jej C). Druhá suma na pravé straně je částečný součet řady začínající až od indexu n_0. Označme jej $\tilde{s}_n$. Dostáváme tak jednoduchý vztah mezi částečnými součty:

$$s_n = C + \tilde{s}_n$$

Z pravidel pro počítání s limitami posloupností (věta o aritmetice limit) přímo plyne, že posloupnost (s_n) má vlastní limitu právě tehdy, když má vlastní limitu posloupnost $(\tilde{s}_n)$. Tedy původní řada konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje zkrácená řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$.

Poznámka:
Lemma nám umožní při zkoumání konvergence řady neuvažovat její první index. Proto v případech, kdy nás nezajímá součet řady, ale jen to, zda konverguje, budeme často místo $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ psát stručněji $\sum a_k$

Důkaz limitního srovnávacího kritéria:
Pro kladnou hodnotu limity $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in (0, \infty)$ zvolíme $\varepsilon = L/2$ a takový index n_0, od kterého má posloupnost $\frac{a_k}{b_k}$ členy z intervalu $(L/2, 3L/2)$ (existence takového n_0 plyne z definice limity posloupnosti).

Výše uvedené formálně zapíšeme

$$\frac{L}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3L}{2} \quad \text{pro } k \geq n_0$$

a dále po úpravě (nerovnice vynásobíme kladným $b_k > 0$):

$$\frac{L}{2} b_k < a_k < \frac{3L}{2} b_k \quad \text{pro } k \geq n_0$$

Odtud plyne, že i řada $\sum a_k$ má počínaje členem a_{n_0} nezáporné členy. Dále z odhadu $\frac{L}{2} b_k < a_k$ plyne ze srovnávacího kritéria pro divergentní řadu $\sum b_k$ divergence řady $\sum a_k$. Z odhadu $a_k < \frac{3L}{2} b_k$ plyne ze srovnávacího kritéria pro konvergentní řadu $\sum b_k$ konvergence řady $\sum a_k$.

Pro $L < 0$ uvažujme řadu s členy $c_k = -a_k$. Pak je $L = \lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{b_k} = -L > 0$. Z věty o aritmetice řad pak plyne, že řada $\sum a_k$ konverguje právě když konverguje řada $\sum c_k$, pro kterou jsme konvergenci/divergenci dokázali výše.

Otázka testující porozumění důkazu

Pokud ve větě o limitním srovnávacím kritériu připustíme nulovou limitu, tedy předpokládáme $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R}$, pak odtud plyne místo ekvivalence jen jedna z implikací. Projděte důkaz a určete, kterou z těchto implikací umíme dokázat.

Příklad na závěr:
Chceme zjistit, zda řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3+1}}{k^2}$ konverguje.

Řešení: Upravíme k-tý člen řady:

$$a_k = \frac{\sqrt{k^3+1}}{k^2} = \frac{\sqrt{k^3(1+1/k^3)}}{k^2} = \frac{k^{3/2}\sqrt{1+1/k^3}}{k^2} = \frac{\sqrt{1+1/k^3}}{k^{1/2}}$$

Použijeme srovnání s řadou se členy $b_k = \frac{1}{k^{1/2}}$, o které víme (z pravidel pro $1/k^p$), že diverguje, neboť $p = 1/2 < 1$. Protože je $\frac{a_k}{b_k} = \sqrt{1+\frac{1}{k^3}}$, plyne z věty o aritmetice limit a věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{k^3}} = 1$$

Protože má řada $\sum b_k$ kladné členy a diverguje a limita je v intervalu $(0,\infty)$, tak z limitního srovnávacího kritéria plyne, že zkoumaná řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3+1}}{k^2}$ také diverguje.

Kapitola 5

Absolutní konvergence řad

V předchozí kapitole jsme se zabývali řadami s nezápornými členy. V praxi se však často setkáváme s řadami, jejichž členy střídají znaménka, nebo nabývají kladných i záporných hodnot zcela nepravidelně. Příkladem může být varovná řada z kapitoly 3, u které jsme viděli, že neopatrná manipulace (přerovnávání) může vést ke změně součtu. V této kapitole si zavedeme pojem absolutní konvergence, který nám zaručí, že se řada bude chovat „slušně“ a budeme s ní moci pracovat podobně jako s konečnými součty.

5.1 Definice absolutně konvergentní řady

Základní myšlenka absolutní konvergence spočívá v tom, že se podíváme na řadu, kde všechny členy nahradíme jejich absolutními hodnotami.

Definice absolutní a neabsolutní konvergence

Říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje řada jejích absolutních hodnot $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, ale řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **konverguje neabsolutně** (nebo také relativně či podmíněně).

5.2 Věta o konvergenci absolutně konvergentní řady

Okamžitě se nabízí otázka: Zaručuje absolutní konvergence i konvergenci původní řady? Odpověď je naštěstí kladná.

Základní tvrzení

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní. (Tedy z konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ plyne konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.)

Důkaz:
Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Pro každý člen a_k zjevně platí nerovnost:

$$-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|$$

Přičtením $|a_k|$ ke všem stranám nerovnosti dostaneme:

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$$

Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, konverguje podle věty o násobení řady konstantou i řada $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$. Nyní můžeme použít srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy: protože $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$, řada $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ také konverguje.

Původní člen a_k můžeme zapsat jako rozdíl:

$$a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$$

Jelikož víme, že řady $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergují, z věty o aritmetice řad plyne, že konverguje i jejich rozdíl, což je přesně naše hledaná řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

5.3 Příklady

Ukažme si nyní příklady obou typů konvergence.

Příklad absolutně konvergentní řady:
Uvažujme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$. Pokud přejdeme k absolutním hodnotám, dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, což je geometrická řada s kvocientem $q = 1/2$. Protože $|q| < 1$, tato řada konverguje, a proto původní střídavá řada konverguje absolutně.

Příklad neabsolutně konvergentní řady (Alternující harmonická řada):
Uvažujme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
Řada absolutních hodnot je harmonická řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, o které víme, že diverguje. Původní řada tedy nemůže konvergovat absolutně. Jak ale dokážeme, že konverguje? Ukážeme to přímo analýzou jejích částečných součtů s_n.

Důkaz konvergence alternující harmonické řady:
Podívejme se nejprve na částečné součty se sudým počtem členů, tedy s_{2n}. Můžeme je uzávorkovat takto:

$$s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

Protože výraz v každé závorce je kladný, posloupnost sudých částečných součtů (s_{2n}) je rostoucí.

Zároveň můžeme s_{2n} uzávorkovat jinak:

$$s_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \frac{1}{2n}$$

Výrazy v těchto závorkách jsou také kladné, což znamená, že od jedničky něco odečítáme. Proto pro všechna n platí $s_{2n} < 1$. Posloupnost (s_{2n}) je tedy rostoucí a shora omezená, z čehož plyne, že musí mít vlastní limitu. Označme ji S.

Nyní se podíváme na liché částečné součty s_{2n+1}. Platí vztah $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$. Pokud přejdeme k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(s_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = S + 0 = S$.

Jelikož sudé i liché částečné součty konvergují ke stejné limitě S, konverguje celá posloupnost částečných součtů k číslu S. Řada je tedy konvergentní.

Částečné součty alternující harmonické řady jsou graficky znázorněny na obrázku 5.1.

5.4 Leibnizovo kritérium

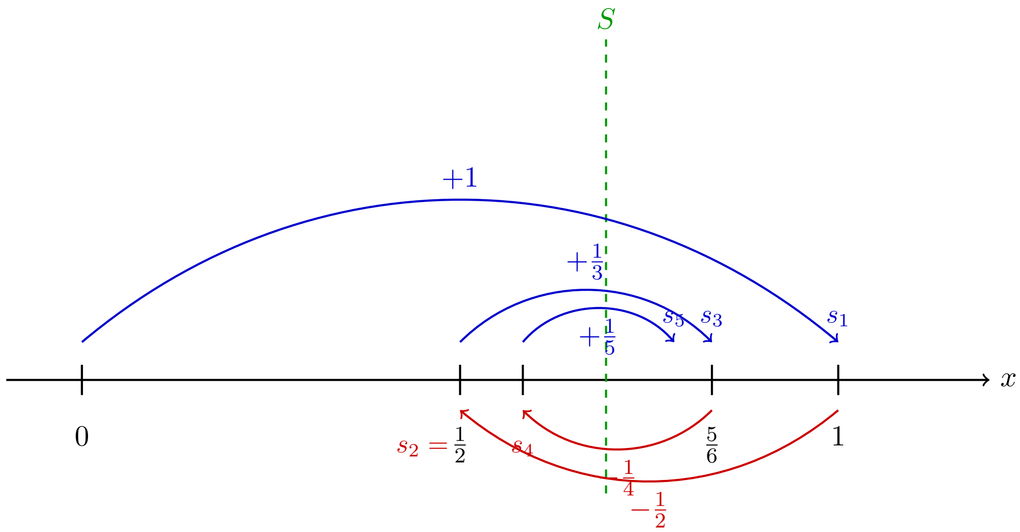
Důkaz konvergence alternující harmonické řady lze zobecnit pro jakoukoliv střídavou řadu s klesajícími členy, což shrnuje následující kritérium.

Leibnizovo kritérium

Nechť (b_k) je posloupnost nezáporných čísel taková, že:

1. $b_{k+1} \leq b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ (posloupnost je nerostoucí).
2. $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Pak alternující řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} b_k$ konverguje.



Obrázek 5.1: Skákání částečných součtů alternující harmonické řady na číselné ose. Modré skoky (přičítání lichých členů) směřují doprava, červené (odčítání sudých) doleva. Vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími součty se zmenšuje k nule, čímž limitu S neúprosně „klešťovitě“ svírají.

Důkaz Leibnizova kritéria je zcela analogický výše uvedenému důkazu pro alternující harmonickou řadu. Zkoumají se odděleně sudé a liché částečné součty a využije se toho, že (b_k) je nerostoucí posloupnost a má limitu nula.

5.5 Podílové kritérium pro absolutní konvergenci

Pro zjišťování absolutní konvergence můžeme často využít podílové (d'Alembertovo) kritérium, které je založené na srovnání s geometrickou řadou.

Podílové kritérium

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s nenulovými členy.

1. Existuje-li číslo $q \in (0, 1)$ a index k_0 takové, že pro všechna $k \geq k_0$ platí $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$, pak řada konverguje absolutně.
2. Platí-li pro všechna $k \geq k_0$ nerovnost $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, pak řada diverguje.

Důkaz:
Pro první část předpokládejme, že $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro $k \geq k_0$. Indukcí snadno ukážeme, že $|a_{k_0+n}| \leq |a_{k_0}| q^n$. Protože geometrická řada $\sum q^n$ pro $q < 1$ konverguje, konverguje podle srovnávacího kritéria i řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_0+n}|$. Přidání konečného počtu členů na začátek řady konvergenci neovlivní, řada tedy konverguje absolutně.

Druhá část: z $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ plyne $|a_{k+1} \geq |a_k|$, tedy posloupnost absolutních hodnot $(|a_k|)$ neklesá. Není tedy splněna nutná podmínka konvergence ($\lim a_k = 0$), a řada tudíž diverguje.

Úkol

Dokažte, že z platnosti

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \quad \text{pro } k \geq k_0$$

plyne pro $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{k_0+n}| \leq |a_{k_0}| q^n$$

Návod: použijte matematickou indukci.

5.6 Limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci

Použití podílového kritéria předpokládá nalezení hodnoty q, která je horním odhadem podílu $|a_{k+1}/a_k|$. V praxi můžeme q určit výpočtem limity tohoto podílu, jak ukazuje následující limitní verze podílového kritéria.

Limitní podílové kritérium

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s nenulovými členy a existuje limita $L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$.

1. Je-li $L < 1$, řada konverguje absolutně.
2. Je-li $L > 1$, řada diverguje.
3. Je-li $L = 1$, kritérium nedává odpověď (řada může konvergovat i divergovat).

Důkaz:
1. Nechť $L < 1$. Zvolme číslo q takové, že $L < q < 1$. Z definice limity vyplývá, že existuje index k_0, od kterého platí $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$. Podle předchozí věty (nelimitního podílového kritéria) tedy řada konverguje absolutně.

2. Nechť $L > 1$. Podobně z definice limity existuje k_0, od kterého je $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$. Posloupnost nekonverguje k nule a řada diverguje.

Nyní si ukážeme, jak limitní podílové kritérium použít v praxi. Než ale přistoupíme k výpočtům, ukažme si malou pomůcku, jak si zapamatovat pravidla tohoto kritéria.

Pomůcka pro zapamatování (Proč zrovna jednička?)

Připomeňme si geometrickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$. Pokud spočítáme podíl jejích dvou sousedních členů, dostaneme:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{q^{k+1}}{q^k} = q$$

Tento podíl je konstantní. Víme také, že geometrická řada konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$.
Limitní podílové kritérium vlastně zkoumá, zda se zadaná řada pro velká k chová zhruba jako geometrická řada. Vypočtená limita L hraje roli „limitního kvocientu“. Proto je logické, že hranicí, kde se konvergence mění na divergenci, je právě číslo 1. Pokud $L < 1$, chová se řada jako konvergentní geometrická řada. Pokud $L > 1$, chová se jako divergentní.

Příklad 1 (Úspěšné použití kritéria):
Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$.

Řešení:
Určíme si k-tý a $(k+1)$-ní člen řady:

$$a_k = \frac{k^2}{3^k}, \quad a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}$$

Nyní spočítáme limitu podílu $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ pro $k \to \infty$. Protože jsou všechny členy kladné, můžeme absolutní hodnotu vynechat:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}}{\frac{k^2}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{3^k}{3^{k+1}} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{3}$$

Jelikož vyšla limita $L = \frac{1}{3} < 1$, řada podle limitního podílového kritéria **konverguje**.

Příklad 2 (Případ, kdy kritérium nedává odpověď):
Zkusme nyní stejné kritérium aplikovat na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, kterou jsme podrobně zkoumali v předchozí kapitole.
Řešení:
Zde máme $a_k = \frac{1}{k^p}$ a $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^p}$. Počítáme limitu podílu:

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^p}}{\frac{1}{k^p}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^p}{(k+1)^p} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^p =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^p = \left(\frac{1}{1+0}\right)^p = 1^p = 1$$

Nezávisle na hodnotě parametru p nám limita vyšla vždy $L = 1$. Z věty o podílovém kritériu víme, že v takovém případě kritérium **nedává odpověď**.

Tento výsledek krásně ilustruje, proč je pro $L = 1$ situace nerozhodná. Vzpomeňme si na výsledky z předchozí kapitoly:

- Pokud zvolíme $p = 2$, dostaneme řadu $\sum \frac{1}{k^2}$, která **konverguje**. Limitní podílové kritérium přitom dává $L = 1$.
- Pokud zvolíme $p = 1$, dostaneme harmonickou řadu $\sum \frac{1}{k}$, která **diverguje**. Limitní podílové kritérium pro ni dává také $L = 1$.

Z hodnoty $L = 1$ tedy skutečně nelze určit vůbec nic – v tomto hraničním případě může řada konvergovat i divergovat, a je proto nutné použít jiný nástroj (například srovnávací nebo integrální kritérium).

5.7 Přerovnání řad

Tato část kapitoly odpovídá na znepokojivou otázku z Kapitoly 3, kde jsme ukázali, že změna pořadí členů může změnit součet řady. Jak to tedy je s komutativním zákonem u nekonečných součtů? Záleží to právě na absolutní konvergenci.

Věta o součtu přerovnané absolutně konvergentní řady

Nechť řada konverguje absolutně a má součet S. Pak každá její přerovnaná řada konverguje také absolutně a má stejný součet S.

Náznak důkazu

U řad s nezápornými členy komutativita platí (součet je supremum částečných součtů nezávisle na pořadí). Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na část tvořenou jen kladnými členy a část tvořenou jen zápornými členy. Protože řada konverguje absolutně, obě tyto „dílčí“ řady mají konečný součet. Jejich přerovnáním se součty nezmění a nezmění se ani jejich vzájemný součet.

Riemannova věta o přerovnání neabsolutně konvergentní řady

Nechť řada konverguje neabsolutně. Pak pro každé reálné číslo S (včetně ∞ a $-\infty$) existuje takové přerovnání této řady, že její nový součet je roven S. Lze ji dokonce přerovnat tak, aby vůbec neměla limitu (oscilovala).

Náznak důkazu Riemannovy věty

Jelikož řada konverguje pouze neabsolutně (členy jdou k nule, ale součet absolutních hodnot je nekonečno), musí se skládat z kladných a záporných členů tak, že součet samotných kladných členů je $+\infty$ a součet samotných záporných členů je $-\infty$. To nám dává do rukou obrovskou volnost.

Chceme-li dosáhnout libovolného součtu S, budeme sčítat zpočátku kladné členy tak dlouho, dokud se náš částečný součet nedostane těsně nad hodnotu S. Pak začneme přidávat záporné členy, dokud neklesneme těsně pod S. Pak opět přidáváme kladné členy, abychom S překročili, atd.

Protože původní členy řady mají limitu nula, naše „přestřelení“ hodnoty S budou stále menší a menší a celkový součet se bude k S limitně blížit.

Tato Riemannova věta elegantně vysvětluje náš paradox s alternující harmonickou řadou z Kapitoly 3. Můžeme si s ní hrát přesně tak, jak se nám zachce.

Kapitola 6

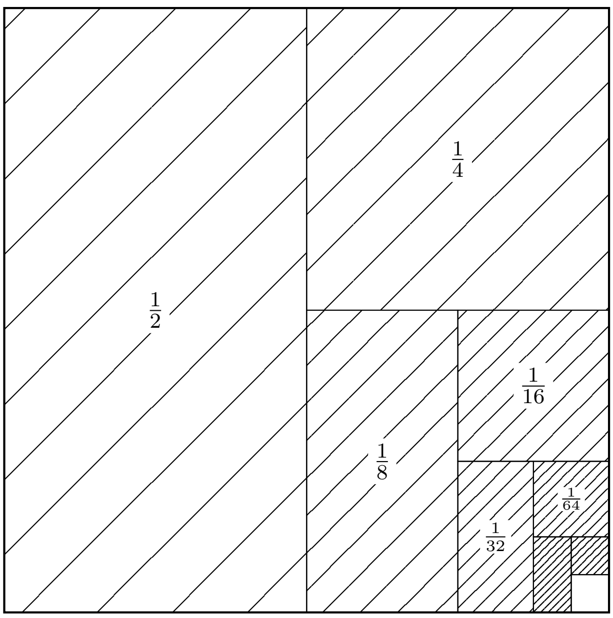
Vizuální reprezentace a důkazy beze slov

Pro studenty, a obzvláště pro ty, kteří se připravují na učitelskou profesi, je nesmírně důležité budovat nejen formální algebraický aparát, ale také geometrickou intuici. Mnoho hlubokých myšlenek z teorie nekonečných řad lze vizualizovat pomocí tzv. důkazů beze slov. V této kapitole si ukážeme tři klasické a velmi silné vizuální modely.

6.1 Geometrická řada: Vyplňování čtverce

Představme si čtverec o obsahu 1. Tento čtverec svisle rozpůlíme a levou polovinu (o obsahu 1/2) vyšrafujeme. Zbylou pravou polovinu vodorovně rozpůlíme a horní část (o obsahu 1/4) vyšrafujeme. Zbytek opět svisle rozpůlíme, a tak dále.

Tento proces názorně ukazuje konvergenci geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Na obrázku vidíme, že postupným přidáváním dalších a dalších zlomků nakonec beze zbytku vyplníme plochu celého čtverce. Vidíme tedy, že součet této řady je přesně 1.

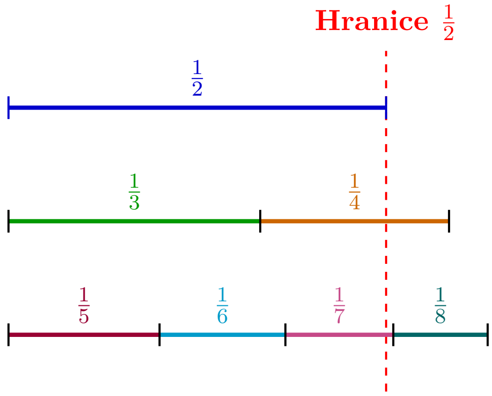


Obrázek 6.1: Geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

6.2 Harmonická řada: Oresmeho vizualizace

Důkaz divergence harmonické řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, který jsme si představili v kapitole 4, pochází od francouzského učence z 14. století, Mikuláše Oresma. Jeho myšlenku sdružování členů do „bloků“ můžeme krásně znázornit pomocí úseček kladených nad sebe.

Na obrázku 6.2 vidíme, že členy řady tvoří rovnoběžné úsečky. Každá nová „vrstva“ úseček je tvořena takovým počtem po sobě jdoucích členů harmonické řady, aby jejich součet bezpečně překonal hranici 1/2. Protože takových bloků (a tedy i vrstev) můžeme vytvořit nekonečně mnoho a každý z nich přidá více než 1/2, šířka naší struktury poroste nade všechny meze.



Obrázek 6.2: Vizuální důkaz divergence harmonické řady

6.3 Řada převrácených hodnot kvadrátů

Otázka, zda řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje, je sice řešitelná srovnávacím kritériem, ale existuje k ní i naprosto fascinující geometrický přístup. Myšlenkou je interpretovat každý člen $\frac{1}{k^2}$ jako obsah čtverce o straně $\frac{1}{k}$. Tyto čtverce následně seskládáme do „věží“.

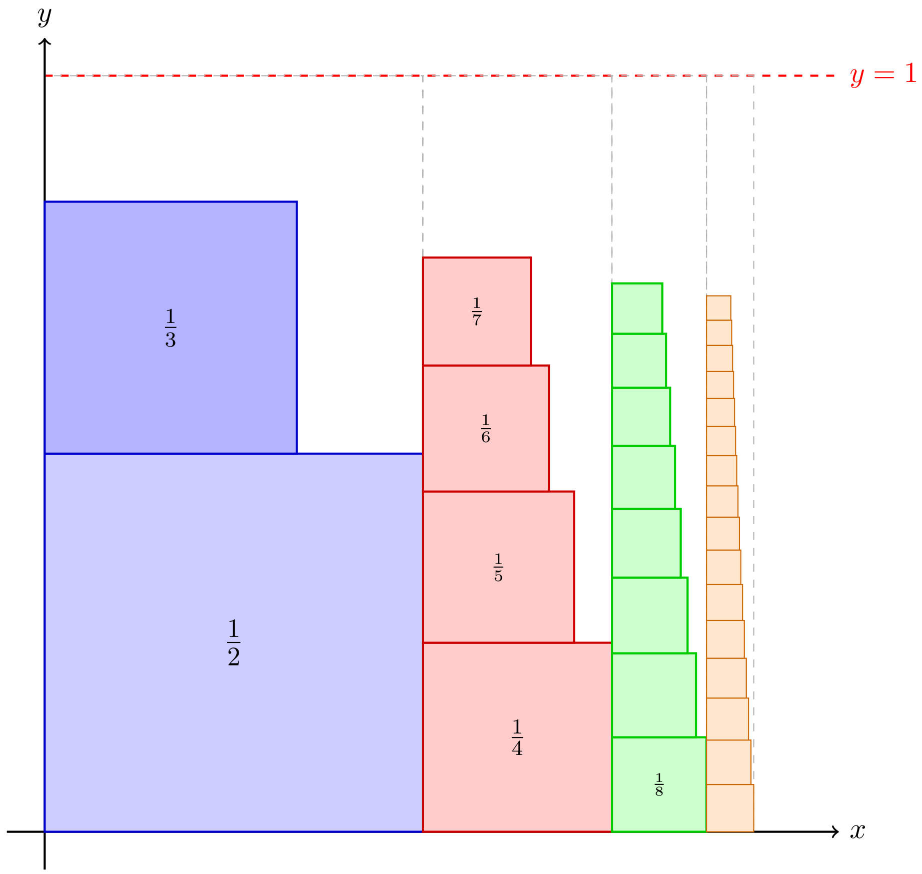
První věž tvoří čtverce o stranách $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. Šířka základny této věže je $\frac{1}{2}$. Druhou věž poskládáme ze čtverců o stranách $\frac{1}{4}$ až $\frac{1}{7}$. Nejširší z nich je čtverec dole, šířka této věže je tedy $\frac{1}{4}$. Třetí věž bude mít vespod čtverec $\frac{1}{8}$, čímž udá šířku základny $\frac{1}{8}$.

Když tyto věže naskládáme vedle sebe na osu x, zjistíme dvě zásadní věci:

1. Součet šířek všech věží je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$. Všechny věže se nám tedy „vejdou“ na úsečku délky 1.

2. Součet výšek jednotlivých čtverců ve věži můžeme shora omezit. Zkoumáním zjistíme, že žádná z věží nepřesáhne limitní výšku $y = 1$.

Jelikož se všechny čtverce o obsazích $\frac{1}{k^2}$ (pro $k \geq 2$) bezpečně vejdou do obdélníkových sloupců (čárkovaně), jejichž celkový obsah nepřesáhne hodnotu 1, řada nutně konverguje. (Plochu prvního členu, zlomku $\frac{1}{1^2} = 1$, v obrázku neznázorňujeme, ten zjevně konvergenci neohrozí).



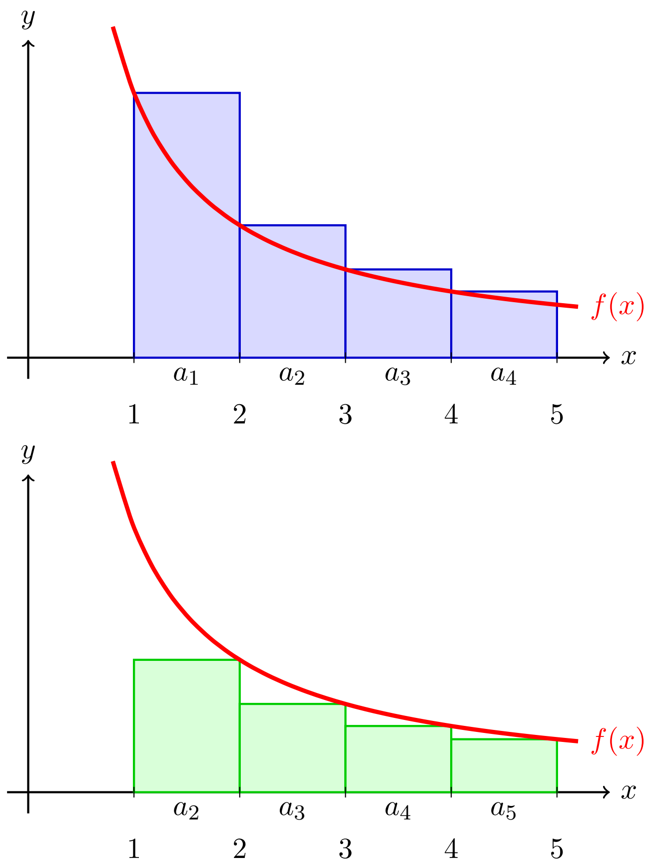
Obrázek 6.3: Poskládání členů řady $\sum \frac{1}{k^2}$ do plochy velikosti 1

6.4 Vizualizace integrálního kritéria

Ve čtvrté kapitole jsme při vyšetřování řady $\sum \frac{1}{k^p}$ pro $p \in (1, 2)$ narazili na situaci, kdy obě srovnávací kritéria selhala a bylo nutné sáhnout po integrálním kritériu. Pro mnoho studentů bývá zpočátku velkou záhadou, jak a proč vlastně můžeme diskrétní sčítání (řadu) porovnávat se spojitým obsahem plochy pod křivkou (integrálem).

Následující obrázek toto spojení krásně a intuitivně odhaluje. Klesající funkci $f(x)$ si nakreslíme do grafu a členy posloupnosti $a_k = f(k)$ si představíme jako obdélníky o šířce 1 a výšce $f(k)$. Obsah každého takového obdélníku je tedy přesně a_k.

Na prvním obrázku obdélníky „přesahují" nad křivku. Vidíme, že součet obsahů obdélníků je větší než plocha pod křivkou. Získáme tak odhad řady zdola pomocí integrálu. Na druhém obrázku jsme obdélníky „posunuli" pod křivku (začínáme členem a_2). Nyní se všechny obdélníky celým svým objemem vejdou pod graf funkce $f(x)$. Získáme tak odhad (zbytku) řady shora pomocí integrálu. Spojitý integrál tedy tvoří naprosto přirozené mantinely pro náš diskrétní součet.



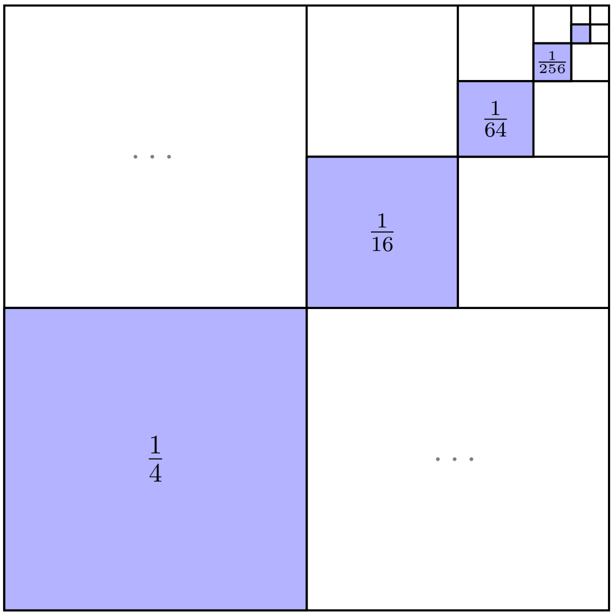
Obrázek 6.4: Geometrická interpretace integrálního kritéria a souvislost řady s nevlastním integrálem.

6.5 Geometrická řada $\sum \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}$

Při výuce geometrických řad (např. při klasickém vyplňování čtverce, které jsme ukázali v první sekci) studenti často získají podvědomý dojem, že „když se sčítá nekonečně mnoho zlomků do obrázku, musí se vyplnit celý a vyjít 1". Následující krásná vizualizace ukazuje geometrickou řadu se součtem $\frac{1}{3}$ a pomáhá tuto chybnou fixaci rozbít.

Představme si jednotkový čtverec. Rozdělíme jej na čtyři stejné menší čtverce a levý dolní vybarvíme (jeho obsah je $\frac{1}{4}$). Pravý horní čtverec si ponecháme pro další dělení a opět jej rozdělíme na čtyři menší čtverce, z nichž levý dolní vybarvíme (obsah $\frac{1}{16}$). Zbydou dva prázdné a jeden (vpravo nahoře) na další dělení. Tento postup opakujeme do nekonečna, viz obrázek 6.5.

Jak z obrázku bez složitého počítání s limitami vyčteme, že je vybarvena právě jedna třetina původního čtverce? Podívejme se na to logicky: V každém kroku rozdělíme zkoumaný čtverec na čtyři. Jeden vybarvíme, jeden si necháme na další dělení a dva zbudou trvale prázdné. Z plochy, která se v daném kroku s konečnou platností rozdělí (což jsou tři čtverečky tvořící tvar písmene L), je vždy přesně jeden ze tří vybarven. Protože tento poměr 1 : 3 platí lokálně v každém měřítku, musí platit i globálně. Vybarvená plocha tak tvoří přesně $\frac{1}{3}$ celého čtverce.



Obrázek 6.5: Důkaz beze slov, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$. V každém kroku (v každém L-tvaru) jsou ze tří čtverečků vybarveny modře poměrně právě $\frac{1}{3}$.

Shrnutí pro budoucí učitele

Doprovázejte výuku nekonečných součtů vizuálními paralelami co nejčastěji. Samotné algebraické manipulace mohou u mnoha studentů vyvolat pocit „kouzlení se symboly“, u kterého ztrácí představu, co se skutečně děje. Převedení součtu řady na vyplňování geometrické plochy je jedním z nejdostupnějších můstků od známého (geometrie na ZŠ a SŠ) k abstraktnímu (limity v nekonečnu na VŠ).

Kapitola 7

Nekonečné řady a Eulerovo číslo

V předchozích kapitolách jsme se naučili sčítat geometrické řady. Většina funkcí, se kterými se v matematice setkáváme (jako exponenciála, sinus, kosinus), ale charakter geometrické řady nemá. Přesto bychom je rádi uměli vyjádřit jako součet nekonečné řady – takzvané mocninné řady. Klíčem k tomuto vyjádření je aproximace funkcí pomocí polynomů.

7.1 Taylorův polynom

Základní myšlenka Taylorova polynomu spočívá v tom, že chceme složitou funkci f v okolí nějakého bodu a nahradit polynomem. Aby si polynom a funkce byli co nejpodobnější, budeme požadovat, aby se v bodě a shodovaly nejen jejich funkční hodnoty, ale i hodnoty první, druhé, třetí, ... až n-té derivace. k-tou derivaci funkce f budeme značit symbolem $f^{(k)}$.

Definice Taylorova polynomu

Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace až do řádu $n \geq 0$. **Taylorovým polynomem** funkce f stupně n v bodě a nazýváme polynom tvaru

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Poznamenejme, že pro $a = 0$ se tento polynom někdy zkráceně označuje jako Maclaurinův polynom.

7.2 Taylorův polynom pro exponenciálu

Aplikujme nyní tuto definici na naši zřejmě nejdůležitější funkci: $f(x) = e^x$. Zvolme střed v bodě $a = 0$.

Výpočet je překvapivě jednoduchý, protože derivace exponenciály je opět exponenciála. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí:

$$f^{(k)}(x) = e^x \implies f^{(k)}(0) = e^0 = 1.$$

Dosazením do vzorce Taylorova polynomu dostáváme aproximaci exponenciály v okolí nuly:

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Získali jsme polynom $T_n(x)$, který aproximuje e^x. Nabízí se tedy otázka: Bude pro $n \to \infty$ limita těchto Taylorových polynomů rovna přesně hodnotě e^x? Abychom to mohli dokázat, musíme si ujasnit, co vlastně znamená, že řada konverguje ke svému součtu.

7.3 Konvergence řady a její zbytek

Než začneme vyšetřovat chybu naší aproximace, dokážeme si jednoduché, ale klíčové tvrzení o konvergenci jakékoliv nekonečné řady.

Lemma o konvergenci řady (nutná a postačující podmínka)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je nekonečná řada a $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je posloupnost jejích částečných součtů. Nechť $s \in \mathbb{R}$. Pak řada konverguje k součtu s právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty}(s-s_n) = 0$.

Důkaz plyne přímo z definice limity a vět o aritmetice limit. Řada konverguje k součtu s právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Rovnost $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ je (díky aritmetice limit) ekvivalentní s tvrzením, že

$$\lim_{n\to\infty}(s - s_n) = \lim_{n\to\infty} s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Tento rozdíl $s - s_n$ můžeme chápat jako „zbytek“ řady (chybu, které se dopouštíme, když nekonečný součet nahradíme jen konečným počtem n členů). V kontextu Taylorových polynomů má tento zbytek své vlastní jméno.

7.4 Zbytek Taylorova polynomu

Při aproximaci funkce $f(x)$ polynomem $T_n(x)$ se nevyhnutelně dopouštíme nějaké chyby. Tuto chybu nazýváme zbytkem.

Definice zbytku Taylorova polynomu

Rozdíl $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazýváme **zbytkem Taylorova polynomu** stupně n. Platí tedy $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.

Abychom dokázali, že nekonečná Taylorova řada konverguje k $f(x)$, musíme v souladu s předchozím tvrzením ukázat, že $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Samotná definice zbytku jako rozdílu $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nám bohužel nedává do ruky žádný nástroj, jak jeho velikost prakticky odhadnout nebo jak dokázat, že se s rostoucím n blíží k nule. Potřebujeme zbytek vyjádřit v nějakém analyticky užitečnějším tvaru. Vzhledem k tomu, že Taylorův polynom je konstruován pomocí derivací v bodě a, je přirozené očekávat, že velikost chyby bude záviset na chování derivací funkce f někde mezi body a a x. Nejpoužívanějším vyjádřením, které tuto myšlenku formalizuje a umožňuje nám zbytek efektivně omezit, je tzv. Lagrangeův tvar. Ten ukazuje, že zbytek po n-tém členu má vlastně úplně stejnou strukturu jako následující, $(n+1)$-ní člen Taylorova polynomu, pouze s tím rozdílem, že se příslušná derivace nepočítá přesně v bodě a, ale v nějakém (blíže neurčeném) mezibodě c.

Věta o Lagrangeově tvaru zbytku

Nechť má funkce f na uzavřeném intervalu s krajními body a a x spojité derivace až do řádu n a uvnitř tohoto intervalu derivaci řádu $n+1$. Pak existuje číslo c ležící ostře mezi body a a x takové, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz je krásnou aplikací Rolleovy věty. Zafixujme bod x. Hledáme konstantu $K \in \mathbb{R}$ takovou, že platí

$$f(x) = T_n(x) + K(x-a)^{n+1}.$$

Naším cílem je ukázat, že $K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. Zaveďme si pomocnou funkci proměnné t (přičemž x a a bereme jako pevně dané konstanty):

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) - K(x-t)^{n+1}.$$

Všimněme si dvou důležitých vlastností této funkce v krajních bodech našeho intervalu:

1. $F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \ldots - 0 = 0.$

2. $F(a) = f(x) - T_n(x) - K(x-a)^{n+1} = 0$ (díky naší úvodní volbě konstanty K).

Funkce $F(t)$ splňuje na intervalu mezi a a x předpoklady Rolleovy věty ($F(a) = F(x) = 0$). Musí tedy existovat bod c ležící mezi a a x, pro který platí $F'(c) = 0$.

Pojďme funkci $F(t)$ zderivovat podle proměnné t. Při derivování závorky (pomocí pravidla pro součin) se většina členů navzájem odečte (tzv. teleskopický efekt). Po zderivování a úpravě zbyde z celé velké závorky pouze jediný člen:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + K(n+1)(x-t)^n.$$

Víme, že $F'(c) = 0$. Dosadíme tedy za t bod c:

$$0 = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + K(n+1)(x-c)^n.$$

Protože $c \neq x$ (bod c leží ostře mezi a a x), můžeme rovnici vydělit nenulovým výrazem $(x-c)^n$ a vyjádřit hledanou konstantu K:

$$K(n+1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \implies K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Tím jsme nalezli naši konstantu K a dokázali vzorec pro Lagrangeův tvar zbytku.

7.5 Vyčíslení Eulerova čísla e

Nyní máme připravený veškerý aparát k tomu, abychom dokázali, že Eulerovo číslo lze zapsat jako součet nekonečné řady.

Uvažujme opět funkci $f(x) = e^x$, střed v bodě $a = 0$ a položme $x = 1$. Zajímat nás bude hodnota $f(1) = e^1 = e$. Taylorův polynom v bodě $x = 1$ má tvar:

$$T_n(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Lagrangeův zbytek pro tuto aproximaci je:

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

kde c je nějaké číslo z intervalu $(0,1)$.

Nyní dokážeme, že limita tohoto zbytku je pro $n \to \infty$ rovna nule. Protože $c \in (0,1)$, je exponenciální funkce e^c rostoucí a jistě platí $0 < e^c < e^1 < 3$. Můžeme tedy zbytek shora odhadnout:

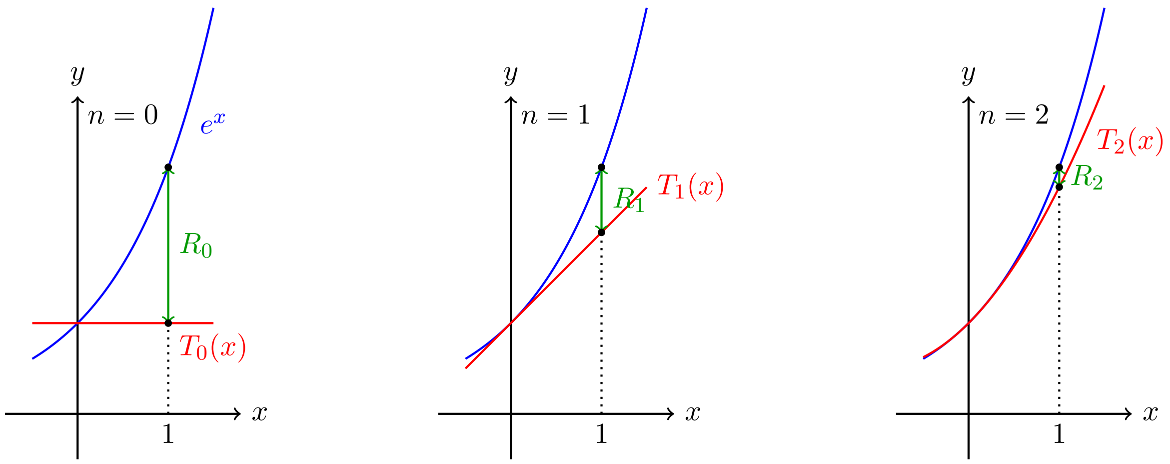
$$0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ a zároveň $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 0$, podle věty o limitě sevřené funkce (o dvou policajtech) nutně platí:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(1) = 0.$$

Pojďme si tuto situaci ilustrovat graficky. Na obrázcích níže vidíme graf funkce $f(x) = e^x$ (modrá křivka) a její Taylorovy polynomy nultého, prvního a druhého stupně se středem v bodě $a = 0$ (červená křivka).

Nás zajímá především situace v bodě $x = 1$. Zelená úsečka zde vizualizuje zbytek $R_n(1)$, tedy přesnou velikost chyby, které se dopustíme, když skutečnou hodnotu Eulerova čísla $e^1 \approx 2{,}718$ nahradíme hodnotou Taylorova polynomu $T_n(1)$.



Obrázek 7.1: Aproximace funkce e^x Taylorovými polynomy v bodě $a = 0$. Zelená úsečka ukazuje velikost zbytku $R_n(1)$ v bodě $x = 1$, který se s rostoucím stupněm polynomu zjevně zmenšuje.

Z grafů můžeme snadno vyčíst konkrétní hodnoty polynomu i velikost chyby (zbytku) pro $x = 1$:

- Pro $n = 0$ aproximujeme exponenciálu konstantou: $T_0(1) = 1$. Zbytek je $R_0(1) = e - 1 \approx 1{,}718$.
- Pro $n = 1$ aproximujeme exponenciálu tečnou: $T_1(1) = 1 + 1 = 2$. Zbytek se zmenšil na $R_1(1) = e - 2 \approx 0{,}718$.
- Pro $n = 2$ aproximujeme exponenciálu parabolou: $T_2(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2{,}5$. Zbytek je již velmi malý: $R_2(1) = e - 2{,}5 \approx 0{,}218$.

Geometricky tedy vidíme, že se graf Taylorova polynomu s rostoucím stupněm n stále více „přimyká“ ke grafu funkce $f(x) = e^x$. Výše jsme matematicky přesně dokázali, že pro $n \to \infty$ se délka této zelené úsečky (zbytek $R_n(1)$) zmenší skutečně až na nulu.

Závěr

Ukázali jsme, že $\lim_{n\to\infty}(e - T_n(1)) = 0$. Podle tvrzení dokázaného na začátku této kapitoly to znamená jediné: nekonečná řada sestávající z převrácených hodnot faktoriálů konverguje přesně k Eulerovu číslu. Získali jsme tak jeden z nejkrásnějších a nejdůležitějších vzorců matematické analýzy:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

Díky tomu, že faktoriál ve jmenovateli roste extrémně rychle, tato řada konverguje velmi rychle. Už součet prvních zhruba deseti členů nám dá hodnotu e přesnou na více než 5 desetinných míst.

Rejstřík