

Řešení úloh na goniometrické funkce

Pro studenty učitelství matematiky

1 Zadání úloh

1. Nalezněte kořeny funkce $f(x) = -\sin(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$ na periodě $I_k = [0, 2\pi]$. Poté zvolte periodu I s krajními body v některých kořenech a na této periodě řešte nerovnice $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.
 2. Určete definiční obor funkce $g(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$ a nalezněte intervaly, na nichž je funkce g rostoucí. Stačí, když určíte intervaly jen v jedné periodě. Krajní body periody volte v bodech, kde se mění druh monotonie.
 3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce g z předchozí úlohy.
-

2 Řešení

Úloha 1: Rovnice a nerovnice

1. Řešení rovnice $f(x) = 0$

Nejprve upravíme předpis funkce vytknutím $\sin(x)$:

$$-\sin(x) + 2 \sin(x) \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(x) \cdot (2 \cos(x) - 1) = 0$$

Součin je nulový, pokud je alespoň jeden z činitelů nulový:

- $\sin(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi\}$ (na daném intervalu).
- $2 \cos(x) - 1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\}$.

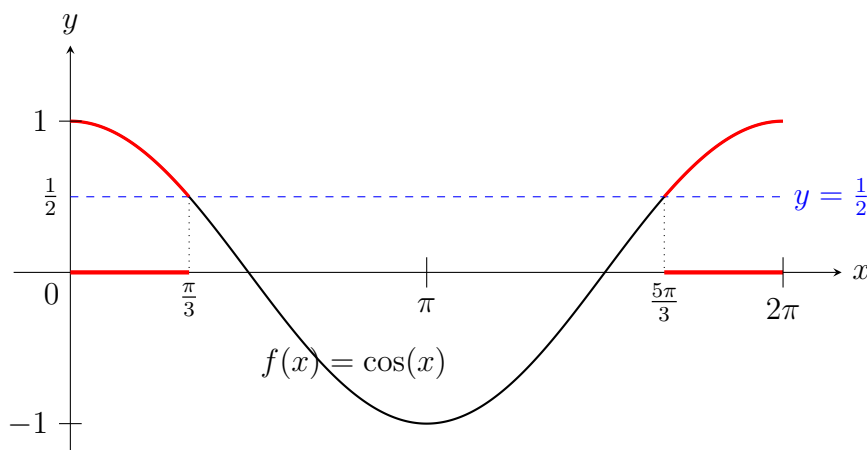
Množina kořenů na I_k je $K = \{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5\pi}{3}; 2\pi\}$.

Poznámka k volbě periody: Jelikož 0 je kořenem funkce, ponecháme periodu $I = [0, 2\pi]$. Pokud by 0 kořenem nebyla, posunuli bychom levý krajní bod intervalu do nejbližšího kořene jak to vyžaduje zadání.

2. Řešení nerovnic $f(x) > 0$ a $f(x) < 0$

Řešíme nerovnici $\sin(x) \cdot (2 \cos(x) - 1) > 0$. Použijeme **grafickou metodu** pomocí pomocných nerovnic. Určíme znaménka činitelů na intervalech vymezených kořeny:

Interval	$(0, \frac{\pi}{3})$	$(\frac{\pi}{3}, \pi)$	$(\pi, \frac{5\pi}{3})$	$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$
$\sin(x)$	+	+	−	−
$2 \cos(x) - 1$	+	−	−	+
$f(x)$	+	−	+	−



Obrázek 1: Grafické řešení nerovnice $2 \cos(x) - 1 > 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Červeně jsou zvýrazněny části grafu funkce $y = \cos(x)$, které leží nad přímkou $y = 1/2$, a jim odpovídající intervaly na ose x .

Vysvětlení: Z grafu sinu vidíme, že je kladný na $(0, \pi)$ a záporný na $(\pi, 2\pi)$. Z grafu kosinu vidíme, že je větší než $1/2$ (a tedy závorka je kladná) na krajích periody, zatímco uvnitř intervalu $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ je menší než $1/2$.

Výsledek:

- $f(x) > 0$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$
- $f(x) < 0$ pro $x \in (\frac{\pi}{3}, \pi) \cup (\pi, \frac{5\pi}{3})$

Metodická poznámka: Existují i jiné metody, například využití důsledku věty o kořeni spojitě funkce (Bolzanova věta). Funkce spojitá na intervalu, kde nemá kořen, nemění znaménko. Stačilo by tedy do každého intervalu dosadit testovací bod. My jsme zvolili grafickou metodu pro její názornost.

Úloha 2: Monotonie

Definiční obor: $D(g) = \mathbb{R}$.

Intervaly monotonie: Využijeme větu o vztahu derivace a monotonie (Je-li $g'(x) > 0$ na intervalu I , pak je g rostoucí na I).

$$g'(x) = (\cos(x))' + (\sin^2(x))' = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x)$$

Vidíme, že $g'(x)$ je totožná s funkcí $f(x)$ z Úlohy 1. Funkce je rostoucí tam, kde $f(x) \geq 0$ (včetně nulových bodů derivace, kde je funkce spojitá).

Výsledek: Funkce je rostoucí na intervalech $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ a $\langle \frac{5\pi}{3}, 2\pi \rangle$.

Alternativní řešení (bez řešení nerovnice): Intervaly monotonie lze určit i bez řešení nerovnice. Stačí vzít interval I , na kterém derivace nemá kořen. Protože je derivace g' spojitá na I , plyne z důsledku Bolzanovy věty, že derivace g' na I nemění znaménko, a proto je funkce g ryze monotónní na I .

Typ monotonie zjistíme porovnáním funkčních hodnot v krajních bodech intervalů (uzlech):

- Interval $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$: $g(0) = 1$, $g(\frac{\pi}{3}) = 1,25$. Hodnota roste $\Rightarrow$ **rostoucí**.
- Interval $\langle \frac{\pi}{3}, \pi \rangle$: $g(\frac{\pi}{3}) = 1,25$, $g(\pi) = -1$. Hodnota klesá $\Rightarrow$ **klesající**.

Úloha 3: Obor hodnot

Určíme $H(g)$ na jedné periodě. Použijeme **Weierstrassovu větu**: Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá svého maxima a minima.

Funkce g je na $\mathbb{R}$ diferencovatelná, proto z nutné podmínky pro existenci extrému (má-li funkce g v bodě a lokální extrém a existuje $f'(a)$, pak je $f'(a) = 0$) plyne, že tyto extrémy nabývá funkce v bodech, kde je derivace nulová (takzvané stacionární body).

Využijeme hodnoty spočítané v alternativním řešení Úlohy 2:

$$g(0) = 1; \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}; \quad g(\pi) = -1; \quad g\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}; \quad g(2\pi) = 1$$

Minimum je -1 , maximum je $\frac{5}{4}$. **Obor hodnot:** $H(g) = \langle -1; 1,25 \rangle$.

Tento text byl vygenerován LLM Gemini 3 Pro a poté přečten a upraven.

Prompt: *V příloze jsou tři úlohy na goniometrické funkce. Vygeneruj jejich řešení pro studenty učitelství matematiky. V první úloze řeš nejdřív rovnici. Konstatuj, že 0 je kořenem, proto bude interval I roven intervalu Ik. Jinak bychom levý krajní bod intervalu posunuli do některého z kořenů. Pro řešení nerovnic uprav výraz na součin, převed' na pomocné nerovnice, které vyřeš graficky (z grafu sinu urči znaménko sinu a z grafu kosinu urči, na kterých intervalech je kosinus větší než 1/2). Poznamenej, že existují i jiné metody (například s použitím důsledku věty o kořeni spojitě funkce – funkce spojitá na intervalu, na které nemá kořen, je na tomto intervalu kladná nebo je na tomto intervalu záporná). My jsme zvolili grafickou metodu pro její jednoduchost. V úloze 2 zopakuj větu o monotonii a derivaci, zderivuj funkci a k určení výsledku použij úlohu 1. Nabídní alternativní řešení: intervaly monotonie je možné určit i bez řešení nerovnice. Stačí vzít intervaly, na kterých nemá derivace kořen a protože je na něm spojitá, plyne z důsledku věty o kořeni, že je na něm rostoucí nebo je na něm klesající. Typ zjistíme spočtením dvou funkčních hodnot (typicky v krajních bodech, pokud je interval uzavřený). Třetí úlohu pak řešíme použitím Weierstrassovy věty a z funkčních hodnot kořenů derivace. Uved' i souvislost s alternativním řešením úlohy 2.*